国立天文台報　第 21 巻，1– 20 （2021）

周期倍分岐で生じた対称周期軌道の記号則

山口喜博*，谷川清隆

（2020 年 8 月 30 日受付；2021 年 1 月 6 日受理）

Coding Rules for Symmetric Periodic Orbits Appearing through the Period-doubling Bifurcation

Yoshihiro YAMAGUCHI*, Kiyotaka TANIKAWA

Abstract

Consider the two-dimensional area-preserving map which satisfies the condition that the Smale horseshoe exists at $a \geq a_c > 0$. In the horseshoe, every periodic orbit is uniquely coded by two symbols 0 and 1. As a result, the symbol sequence s represented by 0 and 1 is determined. For the periodic orbit, the symbol sequence s is the repetition of a finite number of symbols named the code. Suppose that the mother periodic orbit M undergoes the period-doubling bifurcation. Then, the first generation of daughter periodic orbit D_1 appears from M. The n (≥ 1)-th generation of daughter periodic orbit D_n is also defined. Let P_0 be the code for M and P_n be the code for D_n ($n \geq 1$). Our purpose is to derive the coding rule to determine P_n from the given P_0. The coding rules for the restricted symmetric periodic orbits are derived.

概要

本論文では，パラメータ$a \geq 0$を含む二次元面積保存写像を扱う．この写像では，$a \geq a_c > 0$においてスメールの馬蹄が存在する．スメールの馬蹄の中では，それぞれの軌道は0と1の二つの記号で一意的に記号化される．結果として0と1で記述された無限に長い記号列が決定される．周期軌道の場合、記号列は有限個数の記号の繰り返しとして表される．この有限個数の記号の集まりは「コード」と呼ばれる．母周期軌道Mが周期倍分岐を起こしたとしよう．結果としてMから第1世代の娘周期軌道D_1が現れる．同様にして第n (≥ 1) 世代の娘周期軌道D_nが次々と生まれる．P_0をMのコードとして，P_nをD_n ($n \geq 1$)のコードとしよう．P_0が与えられた場合，P_0からP_nを決定する記号化則を導出することが本論文の目的である．特定の対称周期軌道に対する記号化則を導いたので報告する．

* 帝京平成大学（Teikyo Heisei University）

1　本論文の目的

可逆二次元面積保存写像で最も研究されている分岐現象は周期倍分岐であろう [1,2,3,4]．周期 $q\ (\geq 1)$ の楕円型母周期軌道 M が周期倍分岐を起こし，周期 $2 \times q$ の娘周期軌道 D_1 が生じる．また娘軌道 D_1 が周期倍分岐を起こし，周期 $2^2 \times q$ の娘軌道 D_2 が生じる．このように順次周期倍分岐が生じ周期 $2^n \times q$ の娘軌道 D_n が生じる．特にスメールの馬蹄が生じる系において，馬蹄にとどまる軌道は記号0と1を利用して無限個の記号の連なりで表現できる [5,6]．この記号の連なりを「記号列」(symbol sequence）と呼ぶ．記号の有限個の連なりを「語」（ワード，word）という．周期軌道の周期が q のとき，記号列は長さ q のワードの繰り返しで表現できる．このワードのことを周期軌道のコードと呼ぶ．周期軌道の記号列 s はコード σ を使って $s = \sigma^\infty$ と書ける．ただし，σ^n は σ が n 個連なったワードであり，$\sigma^\infty = \lim_{n\to\infty} \sigma^n$ である．母周期軌道 M のコードから娘周期軌道 $D_n\ (n \geq 1)$ のコードはどのように決定されるのか．可逆二次元面積保存写像として要請1.1を満たす写像に制限して記号化問題を議論する．記号化問題については文献 [7] が参考になる．

写像への要請1.1.

（1）パラメータを一つ含む．このパラメータを $a\ (\geq 0)$ とする．

（2）$a = 0$ では可積分系で，$a \geq a_c > 0$ ではスメールの馬蹄 [5] が存在する．

（3）楕円型軌道点の回転の仕方は，パラメータ a の増大とともに単調に速くなる．

本論文では要請1.1を満たす例として下記の写像 $T\ (a \geq 0)$ を利用する [6]．この写像はHénon写像族に属する [8].

$$T:\ y_{n+1} = y_n + f(x_n),\quad x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \tag{1}$$

ここで $f(x) = a(x - x^2)$．$a > 0$ では，不動点が二つ存在する．$P = (0, 0)$ はサドル型不動点，$Q = (1, 0)$ は $0 < a < 4$ では楕円型で，$a > 4$ では反転を伴うサドル型である．便宜上，a の値にかかわらず Q を楕円型不動点と呼ぶことにする．写像 T では，$a \geq a_c = 5.17660536904\cdots$ でスメールの馬蹄が存在する [9]．つまり，要請1.1（1）と（2）は写像 T では成り立っている．

楕円型周期軌道が生じた後，その軌道点の近傍の回転の仕方についてある程度の制限を述べているのが要請1.1 (3) である．軌道点自身の回転は単調に速くなるが，その近傍が軌道点自身より速く回転する状況があり得る．そのようなとき，一時的に例外的な分岐が生じるが，馬蹄の構造には影響を与えないことが示せる．それについては別の論文で議論する．要請1.1（3）より，パラメータの増大につれて楕円型周期軌道点の回転分岐が「実質的」に単調に生じることが保証される．

本論文で検討する問題を提示するために必要な定義を紹介し，次に議論する問題1.3を提示する．

用語定義1.2.

（1）写像 T のある分岐で生じた周期軌道 M が周期倍分岐を起こすとする．この M を周期倍分岐の母（周期）軌道と呼ぶ．

（2）母軌道 M の周期倍分岐で生じた娘（周期）軌道を第1世代の娘軌道 D_1 とする．D_1 の周期倍分岐で生じた娘軌道を第2世代の娘軌道 D_2 とする．同様にして第 n 世代の娘軌道を D_n と書く．

（3）母軌道 M のコードを P_0 とし，娘軌道 D_n のコードを P_n とする．

問題1.3.

与えられたコード P_0 からコード $P_n\ (n \geq 1)$ を決定する記号則を導け．

問題1.3が意味を持つのは馬蹄においてコード重複禁止則（性質1.4）が成り立つからである．

性質1.4.（コード重複禁止則）

馬蹄に存在する周期軌道とコードは一対一対応である [5,10].

ここで若干の注意が必要であろう．周期 q の軌道は q 個のコードを持つ．この軌道は馬蹄内に q 個の点を持つ．したがって厳密に言えば，ひとつの周期軌道に q 個の点が対応する．本論文で扱う周期軌道を次に示す．

制限1.5.（本論文で扱う母周期軌道）

（a）楕円型不動点 Q.

（b）楕円型不動点 Q の回転分岐で生じた対称周期軌道.

（c）サドルノード分岐で生じた対称周期軌道.

第2節以降の内容を紹介する．

第2節では，本論文で使用する記号，概念ならびに数学的道具を紹介する．

第3節では，サドルノード分岐で生じた対称周期軌道の記述方法を導入する．

第4節では，周期倍分岐の性質をまとめ，周期倍分岐の分類を行う．

第5節では，制限1.5で述べた周期軌道に対する記号

則を導く．

第6節では，本論文で得られた結果をまとめる．

2 準備

2.1 対合（ついごう）と対称線

2つの対合をg, hとして，式(1)の写像Tは

$$T = h \circ g \tag{2}$$

と書ける．記号$\circ$は写像の合成を意味する記号である．対合gとhは面積保存写像であるが方向反転写像である．また，$h \circ h = g \circ g = \mathrm{id}$が成り立つ．対合$g$と$h$は，写像として次のように作用する．

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y - f(x) \end{pmatrix},\ h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -y \end{pmatrix}. \tag{3}$$

対合gとhの作用は時間反転操作に相当する．また速度に相当する変数yの反転も同時に行なっている． 写像Tはバーコフの意味での可逆性をもつといわれる[6].

対合gとhに関してそれぞれ不変な集合が対称線である．

$$S_g = \{(x, y) \mid y = -(1/2) f(x)\}, \tag{4}$$

$$S_h = \{(x, y) \mid y = 0\}. \tag{5}$$

ここで対称周期軌道と非対称周期軌道を定義しておく．

定義2.1.

(1) 周期軌道が一周期の間に対称線上に軌道点を二点もつならば，対称周期軌道と呼ばれる．

(2) 不動点PとQは対称線の交点にある．

(3) 周期軌道が対称線上に軌道点をもたないならば，非対称周期軌道と呼ばれる．

2.2 周期軌道の安定性

周期軌道の（線形）安定性を判定する方法を紹介する．ここで$q\,(\geq 1)$を軌道周期とする．周期qの軌道上の点を$z_k = (x_k, y_k)\,(0 \leq k \leq q-1)$とする．軌道点$z_k$における線形行列$M(z_k)$は

$$M(z_k) = \begin{pmatrix} 1 & f'(x_k) \\ 1 & 1 + f'(x_k) \end{pmatrix} \tag{6}$$

と得られる．ここで，$f'(x_k) = a\,(1 - 2x_k)$．写像が面積保存かつ方向保存であることは，$M(z_k)$の行列式が1であることからわかる．

写像T^qの線形行列は$M_q = M(z_{q-1}) \cdots M(z_1)M(z_0)$である．$r_q\,(a) = \mathrm{Trace}M_q$として，固有値$\lambda$を決定する固有方程式は次のように書ける．

$$\lambda^2 - r_q(a)\lambda + 1 = 0. \tag{7}$$

ここで係数$r_q(a)$を安定性係数と名づける．二つの固有値を$\lambda_\pm$と書く．

安定性係数を利用して周期解の安定性を分類する．$r_q(a) > 2$ならば，固有値は$0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$を満たす．軌道はサドル型で不安定である．$|r_q(a)| < 2$ならば，固有値$\lambda_\pm$は複素共役であるので軌道は楕円型で安定である．$r_q(a) < -2$ならば，固有値は$\lambda_- < -1 < \lambda_+ < 0$を満たす．軌道は反転を伴うサドル型で不安定である．周期倍分岐および反周期倍分岐の分岐点では $r_q(a) = -2$が成り立ち，固有値は$\lambda_\pm = -1$である．ただし，固有値が複素数から実数への移行の際に周期倍分岐が生じ，実数から複素数への移行の際に反周期倍分岐が生じる．同周期分岐および反同周期分岐の分岐点では $r_q(a) = 2$が成り立ち，固有値は$\lambda_\pm = 1$である．この場合，固有値が複素数から実数への移行の際に同周期分岐が生じ，実数から複素数への移行の際に反同周期分岐が生じる．

2.3 スメールの馬蹄と軌道の記号化

いくつかの用語を導入する．サドル不動点Pの安定多様体と不安定多様体はPを取り去るとそれぞれ二本の分枝に分かれる．Pより右上方に出ている不安定多様体の分枝を（Pを含めて）不安定多様体W_uと呼ぶことにし，Pに右下から入る安定多様体の分枝を（Pを含めて）安定多様体W_sと呼ぶことにする．曲線または一次元多様体上の閉弧を$[A, B]_C$と書く．Cは曲線または一次元多様体で$A, B \in C$．区間の左端は上流，右

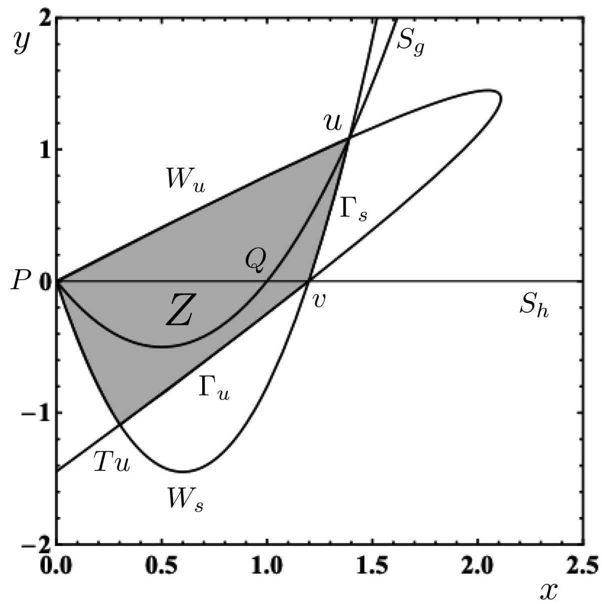

図1：サドル不動点Pの安定多様体W_sと不安定多様体W_uの弧を利用して基本領域Zを定義する（灰色領域）．点uとvは主ホモクリニック点. 弧$\Gamma_s = [u, v]_{W_s}$と弧$\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u}$. $a = 4$.

端は下流にある．安定多様体および不安定多様体の場合，写像で進む先が下流である．曲線の場合，場合に応じて上流，下流を定義する．必要とあれば，開弧や半開弧も定義する．

W_uとW_sのふるまいを追跡する. W_uはPを出発して最初に対称線$S_g(y>0)$と交差し，次に対称線$S_h(x>0)$と交差する（図1)．交点を順にu, vとする. W_sも同じ点で対称線と交差する．交点uとvは，主ホモクリニック点と呼ばれる（教科書[6]の1.6節参照)．また，関係$W_s=gW_u$と$W_s=hW_u$が成り立つ．弧$[P,u]_{W_u}$, 弧$\Gamma_s=[u,v]_{W_s}$，弧$\Gamma_u=[v,Tu]_{W_u}$，弧$[Tu,P]_{W_s}$で囲まれた閉領域を基本領域Zと呼ぶ（図1における灰色領域)．ここで，$hu=hgu=Tu$と$v=hv$を利用すると，$[Tu,P]_{W_s}=h[P,u]_{W_u}$と$\Gamma_s=h\Gamma_u$が成り立つことがわかる．これらより$Z=hZ$が成り立つ．基本領域$Z$を使ってスメールの馬蹄を構成する．

パラメータaを増加すると，安定多様体の弧$T^{-1}\Gamma_s$が対称線$S_h(0<x<1)$を横切って$y<0$の領域に入る．図2（a）では弧$T^{-1}\Gamma_s$と弧Γ_uは離れている．スメールの馬蹄の完成前の状況である．更にパラメータaを増加する．$a=a_c=5.17660536904\cdots$で，弧$T^{-1}\Gamma_s$と弧$\Gamma_u$が接触する．このときスメールの馬蹄が完成する．$a=5.5$とした図2（b）では，弧$T^{-1}\Gamma_s$と弧$\Gamma_u$は二点$\alpha$と$\beta$で交差している．これはスメールの馬蹄が完成した後の配置である．

図3（a）に，$a=5.5$における基本領域Zとその逆像$T^{-1}Z$を描いた．共通領域$Z\cap T^{-1}Z$は，二つの閉領域V_0とV_1に分離している（図3（b)）．V_0は弧$[P,T^{-1}u]_{W_u}$，弧$[T^{-1}u,\alpha]_{W_s}$，弧$[\alpha,Tu]_{W_u}$と弧$[Tu,P]_{W_s}$で囲まれている．ここで，$g\alpha=\alpha$，$gT^{-1}u=Tgu=Tu$，$gT^{-1}\Gamma_s=Tg\Gamma_s=T\Gamma_u$と$g[P,u]_{W_u}=[P,u]_{W_s}$を利用すると，$gV_0=V_0$が得られる．同様の方法で$gV_1=V_1$も示せる．$V_0$は

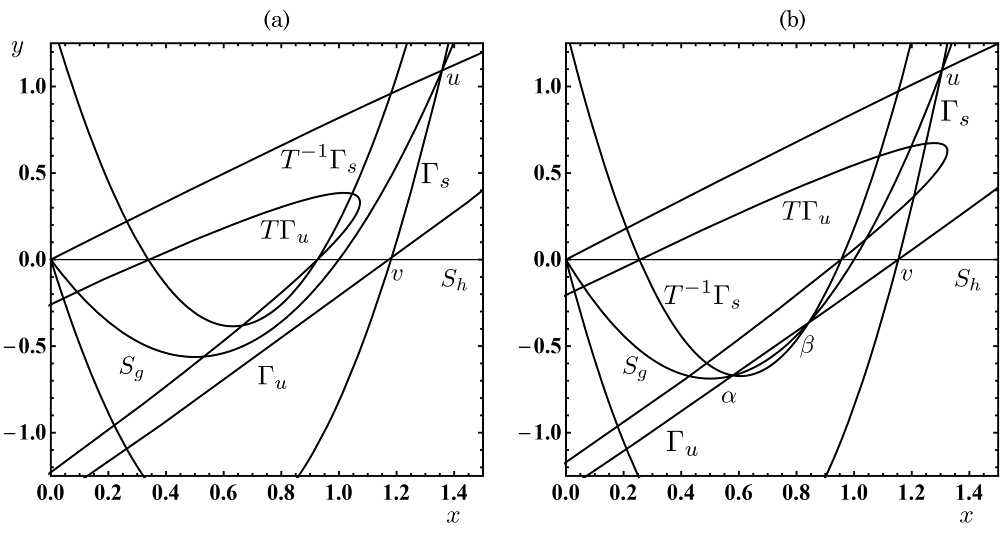

図2：（a）スメールの馬蹄の完成前．a= 4.5.（b）スメールの馬蹄の完成後．a = 5.5.

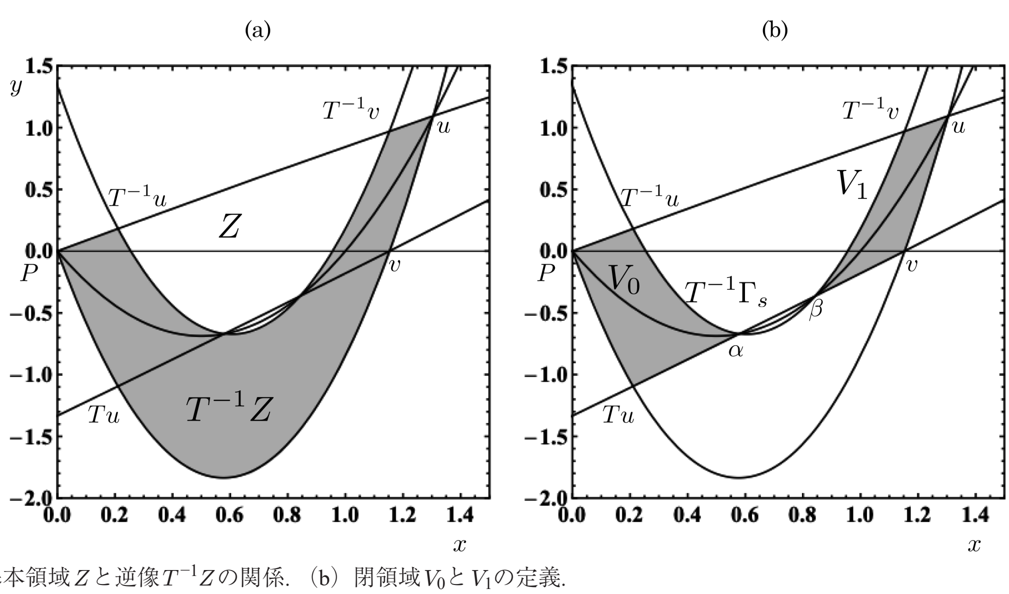

図3：（a）基本領域Zと逆像$T^{-1}Z$の関係.（b）閉領域V_0とV_1の定義.

サドル型不動点Pを含み，V_1は楕円型不動点Qを含む.

スメールの馬蹄に含まれる軌道を記号化してコードの偶奇性を定義する．軌道点が閉領域V_0に入れば記号0を与え，閉領域V_1に入れば記号1を与える．これより一つの軌道に対して無限に長い記号列sが得られる．サドル型不動点のコードは0であり，楕円型不動点のコードは1である.

定義2.2.（偶奇性）
コードに含まれる 1 の個数が偶数個ならば，コードは偶である．コードに含まれる 1 の個数が奇数個ならば，コードは奇である.

コードの基本的性質を性質2.3および2.4としてまとめておく（教科書 6 の 2.3 節）.

性質2.3.
(1) 軌道点z_kの記号と，軌道点gz_kの記号は同じである.
(2) コードσを逆順に書いたコードσ^{-1}を時間反転コードと呼ぶ．周期軌道が対称であるための必要十分条件は$\sigma = \sigma^{-1}$である．ただし，記号の巡回を許す.
(3) 偶（または奇）コードの周期軌道は スメールの馬蹄の中でサドル型（または反転を伴うサドル型）である.
(4) 奇コードの軌道は必ず周期倍分岐を起こす.
(5) 偶コードの軌道が周期倍分岐を起こすならば，必ず反周期倍分岐と同周期分岐を順次起こす.

証明
(1) V_0 も V_1 も対合 g に関して不変であることより（1）が成り立つ.
(2) まず $\sigma = \sigma^{-1}$ ならば対称周期軌道であることを示す．$\sigma^{\infty} = (s_0 s_1 \cdots s_{q-1})^{\infty}$ を考える．記号列の添え字を通し番号に書き換え，改めて ... $s_{-1} s_0 s_1$ ... と書く．まず，s_0 を中心として反転対称の場合を考える．仮定により記号列 ... $s_{-1} s_0 s_1$ ... と ... $s_1 s_0 s_{-1}$ ... が同じだから，$s_{-1} = s_1$．対応する軌道点 z_{-1} と z_1 の間に $gz_{-1} = z_1$ なる関係がある．$z_0 = T^{-1} z_1 = gh\,(gz_{-1}) = gTz_{-1} = gz_0$. ここで周期 q が偶数 $(q = 2k)$ とすると，$z_{-k} = z_k$ と $z_{-k} = gz_k$ が成り立つ．よって，$z_k = gz_k$ が得られる．軌道点 z_0 と z_k が対称線 S_g 上にあるから，この周期軌道は定義 2.1（1）より対称周期軌道である. 次に周期 q が奇数 $(q = 2k+ 1)$ とすると，$z_{-k} = z_{k+1}$ と $z_{-k} = gz_k$ が成り立つ．よって，$hz_{-k} = hz_{k+1}$ と $hz_{-k} = hgz_k = z_{k+1}$ が得られる．よって，$z_{k+1} = hz_{k+1}$ が得られる．軌道点 z_0 が対称線 S_g 上にあり，軌道点 z_{k+1} が対称線 S_h 上にあるから，この周期軌道は対称周期軌道である.

次に，s_0 と s_1 の間に仮想的に点 ● を置く．点 ● を中心として反転対称性が成り立つ場合を考えよう．すなわち ... $s_{-1} s_0$ ● $s_1 s_2$ ... と ... $s_2 s_1 s_0$ ● s_{-1} ... が同じだから $s_0 = s_1$ である．対応して $z_0 = gz_1$ が成り立つ．両辺に T を作用して $z_1 = Tz_0 = hg\,(gz_1) = hz_1$．ここで周期 q を $q = 2k$ とする．$z_1 = hz_1$ の両辺に T^k を作用すると，左辺は z_{k+1} で，右辺は $T^k hz_1 = hT^{-k} z_1 = hz_{-k+1}$．$q = 2k$ より，$z_{-k+1} = z_{k+1}$ が成り立つ．軌道点 z_1 と z_{k+1} が S_h 上にあるから，コード σ の周期軌道は対称周期軌道である．次に周期 q を $q = 2k{+}1$ とする．この場合も，$z_{k+1} = hz_{-k+1}$ が成り立つ．$q = 2k{+}1$ より, $z_{-k+1} = z_{k+2}$ が成り立つから，$z_{k+1} = hz_{k+2}$ が得られる．両辺に g を作用すると，左辺は gz_{k+1} で，右辺は $ghz_{k+2} = T^{-1} z_{k+2} = z_{k+1}$. 軌道点 z_1 が S_h 上にあり, 軌道点 z_{k+1} が S_g 上にあるから, コード σ の周期軌道は対称周期軌道である .

逆に対称周期軌道ならば $\sigma = \sigma^{-1}$ であることを示す．$z_k = gz_k$ の場合，$z_{k+j} = gz_{k-j}$ が成り立つ．よって，記号列は s_k を中心として反転対称である．$z_k = hz_k$ の場合，$z_{k-1} = gz_k$ が成り立つ．よって, $z_{k-1-j} = gz_{k+j}$ が得られる．この場合は，s_{k-1} と s_k の間に仮想的に点 ● を置く．記号列は点 ● を中心として反転対称になる.
(3) 軌道点に（たとえば鉛直向きに）単位ベクトル ν を付随させる．軌道点が V_1 から V_0 へ遷移したり, また V_1 から V_1 へ遷移すると，軌道点およびその近傍が回転するのでベクトルは反転する．しかし, 軌道点が V_0 から V_0 へ遷移したり, また V_0 から V_1 へ遷移してもベクトルは反転しない．このことから，偶コードならば一周期後，ベクトル ν は反転しない．よって，スメールの馬蹄の中で軌道はサドル型である．奇コードならば一周期後，ベクトル ν は反転する．よって，スメールの馬蹄の中で軌道は反転を伴うサドル型である.
(4) 奇コードの楕円型軌道が反転サドル型になるためには周期倍分岐を経験する必要がある .
(5) 偶コードの周期軌道がスメールの馬蹄の中でサドル型になるためには，次のように分岐が順次生じるはずである．楕円型軌道が周期倍分岐を起こし反転を伴うサドル型となる．それが反周期倍分岐を起こして楕円型に戻る．最後に，楕円型は同周期分岐を起こしてサドル型になる．反周期倍分岐と同周期分岐については教科書 [6] を参考にしてほしい.

性質2.4.
軌道点z_0から出発する周期軌道を$O\,(z_0)$と書く.
(1) $O(gz_0) = O(z_0)$ または $O(hz_0) = O(z_0)$ が成り立つな

らば，$O(z_0)$ は対称周期軌道である．

（2）$O(z_0)$ が対称周期軌道ならば，$O(z_0) = O(gz_0) = O(hz_0)$ が成り立つ．

(1) の証明． $O(gz_0) = O(z_0)$ の場合を証明する．gz_0 は $O(z_0)$ に含まれる．最初に，$gz_0 = z_{2k+1}$ を満たす k が存在する場合を考える．この関係に $T^k h$ を作用すると，左辺は $T^k hgz_0 = z_{k+1}$，右辺は $T^k hz_{2k+1} = hz_{k+1}$，すなわち $z_{k+1} = hz_{k+1}$ である．z_{k+1} が対称線 S_h 上にあるから軌道は対称である． 次に $gz_0 = z_{2k}$ を満たす k が存在する場合，両辺に T^{-k} を作用すると，左辺は $T^{-k}gz_0 = gT^k z_0 = gz_k$ で，右辺は z_k である．よって，$z_k = gz_k$ が得られる．z_k は対称線 S_g 上にあるので軌道は対称である．

(2) の証明． 最初に，$z_k \in S_g$ を満たす k が存在するとしよう．つまり $gz_k = z_k$ が成り立つ．両辺に T^k を作用すると，左辺は $T^k gz_k = gT^{-k}z_k = gz_0$ で，右辺は z_{2k}．関係 $gz_0 = z_{2k}$ より，gz_0 は $O(z_0)$ に含まれる．すなわち，$O(z_0) = O(gz_0)$ が成り立つ．$gz_0 = z_{2k}$ の両辺に T を作用すると，左辺は $Tgz_0 = hggz_0 = hz_0$ で，右辺は z_{2k+1}．よって，$hz_0 = z_{2k+1}$ が得られる．すなわち $O(z_0) = O(hz_0)$ が成り立つ．

次に $z_j \in S_h$ を満たす j が存在するとしよう．$hz_j = z_j$ の両辺に T_j を作用すると，左辺は $T_j hz_j = hT^{-j}z_j = hz_0$ で，右辺は z_{2j}．つまり，$hz_0 = z_{2j}$ より，hz_0 は $O(z_0)$ に含まれる．両辺に T^{-1} を作用する．左辺は $T^{-1}hz_0 = ghhz_0 = gz_0$ で，右辺は z_{2j-1}．よって，$gz_0 = z_{2j-1}$ が得られる．よって gz_0 は $O(z_0)$ に含まれる． まとめると $O(z_0) = O(gz_0) = O(hz_0)$．

2.4　コードの表現

q 周期の軌道には q 個の異なるコードがあり，対応して q 個の点がスメール馬蹄内に決まる．スメール馬蹄内で得られる記号列は，テント写像で得られる0，1の記号列あって，二進数ではない．だから q 個の軌道点は通常の座標の順に左右に並ばない．そこでコードを二進数に変換する必要がある．そうすれば座標の大小を比較することができる．本節では，二進数にしたときに最小数となるようなコードを「コードの最小値表現」と呼ぶ．

テント写像の記号列から二進法写像の記号列への変換規則2.5を紹介する（教科書[6]の4.3節）．

変換規則2.5.
変換前を $x = {}_\bullet s_1 s_2 s_3 \cdots$ とし，変換後は $\hat{x} = {}_\bullet t_1 t_2 t_3 \cdots$ とする．

（1）$t_1 = s_1$.

（2）$k \geq 2$ の場合，t_k は下記の規則に従って決める．

[a] s_1 から s_{k-1} までの1の個数が奇数の場合．$t_k = 1 - s_k$.

[b] s_1 から s_{k-1} までの1の個数が偶数の場合．$t_k = s_k$.

（3）特に周期軌道の場合は同じコードの繰り返しになるので，同じコードの繰り返しが確認できたら手順を終了する．

次にコードの最小値表現を定義する．

定義2.6.（最小値表現）
コード $s = s_0 s_1 \cdots s_{q-1}$ の記号列 s^∞ を用意する．小数点を挿入すると q 個の異なったコード $x_j\,(0 \leq j \leq q-1)$ が得られる．

$$x_j = {}_\bullet(s_j s_{j+1} \cdots s_{q-1} s_0 \cdots s_{j-1})^\infty. \tag{8}$$

変換規則2.5を利用して，これらを二進数表示に変換した値を $\hat{x}_j = {}_\bullet(t_j t_{j+1} \cdots t_{q-1} t_0 \cdots t_{j-1})^\infty$，$j = 0, 1, \ldots, q-1$ と書く．q 個の中で $\hat{x}_k$ の値が最小であるとする．対応する元のコード $x_k = s_k s_{k+1} \cdots s_{q-1} s_0 \cdots s_{k-1}$ を最小値表現と名づける．

以下の大小判定手順2.7を使用すると二進数表示に変換しなくてもコードの大小判定ができる．

大小判定手順2.7. [11]
二つのコード σ_1 と σ_2 を用意する．これらの大小判定は以下のように行う．コード σ_1 と σ_2 から記号列 $s = {}_\bullet(s_0 s_1 \cdots)^\infty = {}_\bullet s_0 s_1 \cdots$ と $t = {}_\bullet(t_0 t_1 \cdots)^\infty = {}_\bullet t_0 t_1 \cdots$ を復元する．この二つを比較する．$s_i = t_i\,(i < k)$ で $s_k \neq t_k$ であるとしよう．${}_\bullet s_0 s_1 \cdots$ と ${}_\bullet t_0 t_1 \cdots$ を二進法表現に変換した $\hat{x}$ 座標値をそれぞれ $\hat{x}_s$ および $\hat{x}_t$ とする．

（1）和 $\sum_{i=0}^{k} s_i$ が偶数ならば $\hat{x}_s < \hat{x}_t$ が成り立つ．

（2）和 $\sum_{i=0}^{k} s_i$ が奇数ならば $\hat{x}_s > \hat{x}_t$ が成り立つ．

ここで二種類の正規表現を導入する．ひとつは楕円型不動点 Q が周期倍分岐を起こして生じる娘周期軌道のコードを記述するためである（定義2.8（a））．もうひとつは楕円型周期軌道が回転分岐を起こし生じた楕円型周期軌道が周期倍分岐を起こして生じる娘周期軌道のコードを記述するためである（定義2.8（b））．サドルノード分岐で生じた周期軌道を記述するための正規表現は第3節で導入する．

周期 q の周期解の最小値表現コードを

$$s_0 s_1 \cdots s_{q-2} s_{q-1}$$

とする．最小値表現であるから $s_0 = 0$ である．またテント写像を含む単峰写像では最大値は最小値に写される．よって $s_{q-1} = 1$ である．

$\hat{z}_{q-1}$ の $\hat{x}$ 座標値は最大値である．つまり，s_{q-1} を先頭にした表現が最大値表現である[11]．最大値 $\hat{z}_{q-1}$ へ写

される前の$\hat{z}_{q-2}$の$\hat{x}$座標値は$\hat{x}=1/2$に最も近接している．これはテント写像の性質から導かれる．

対称周期軌道では，$\hat{z}_{q-2}=\hat{g}\,\hat{z}_{q-2}$が成り立つ場合と，$\hat{z}_k=\hat{g}\,\hat{z}_{q-2}$ $(0\le k\le q-3)$が成り立つ場合がある．前者の場合，$\hat{z}_{q-2}$は対称線$\hat{S}_g$上にある．後者の場合，相平面の軌道点に翻訳すると，$z_k=gz_{q-2}$である．対称周期軌道の場合，z_kは$O(z_{q-2})$に属する（性質2.4（2））．$k=q-2$ならば，z_{q-2}は対称線S_g上にある．特に楕円型不動点Qの回転分岐で生じたp/q-BEにおいては，$\hat{z}_0=\hat{g}\hat{z}_{q-2}$と$z_0=gz_{q-2}$が成り立つ[12].

定義2.8.（正規表現）
周期軌道の記号平面での軌道点$\hat{z}_n$の記号をs_nとする．この軌道のコードσの最小値表現を

$$s_0\,s_1\,\cdots\,s_{q-2}\,s_{q-1}$$

とする．$s_0=0,\ s_{q-1}=1$である．

（a）$\hat{z}_{q-2}=\hat{g}\,\hat{z}_{q-2}$の場合．$s_{q-2}$を先頭に配置したコード

$$s_{q-2}\,q_{q-1}\,s_0\,\cdots\,s_{q-3}$$

の添え字を0から始まるように書き換える．

$$\sigma=s_0\,s_1\,s_2\,\cdots\,s_{q-1}.$$

これをコードの正規表現と呼ぶ．ここで，$s_1=1,\ s_2=0$.

対（つい）コード$\underline{\sigma}$を定義する．

$$\underline{\sigma}=\underline{s}_0\,s_1\,s_2\,\cdots\,s_{q-1}.$$

ここで，$\underline{s}_0=1-s_0$.

（b）$\hat{z}_k=\hat{g}\,\hat{z}_{q-2}$ $(0\le k\le q-3)$ の場合．軌道点$\hat{z}_k$と$\hat{z}_{q-2}$を$\hat{g}$-対と定義する．最小値表現$s_0\,s_1\,\cdots\,s_k\,\cdots\,s_{q-2}\,s_{q-1}$を，記号$s_k$を先頭にした表現 $s_k\,\cdots\,s_{q-2}\,s_{q-1}\,s_0\,s_1\,\cdots\,s_{k-1}$にする．この表現の添え字を0から始まるように書き直す．

$$\sigma=s_0\,s_1\,\cdots\,s_{q-k-3}\,s_{q-k-2}\,\cdots\,s_{q-1}.$$

これをコードの正規表現と呼ぶ．ここで，$s_{q-k}=0$, $s_{q-k-1}=1$.

対（つい）コード$\underline{\sigma}$を定義する．

$$\underline{\sigma}=\underline{s}_0\,s_1\,\cdots\,s_{q-k-3}\,\underline{s}_{q-k-2}\,\cdots\,s_{q-1}.$$

ここで，$\underline{s}_0=\underline{s}_{q-k-2}=1-s_0$.

最後に定義2.8の正規表現に対して$\hat{g}$-対をもとにして語dおよびその偶奇性を定義する．

定義2.9.（語dとd-偶奇性の定義）

（1）定義2.8（a）で定義された正規表現の場合．語dは空とし，d-偶奇性は偶とする．

（2）定義2.8（b）で定義された正規表現の場合．次のように語dを定義する．

$$d=s_0\,s_1\,\cdots\,s_{q-k-3}.$$

語dに含まれる1の個数が偶数（奇数）ならば，d-偶奇性を偶（奇）とする．

記号s_0に対応する軌道点とs_{q-k-2}に対応する軌道点が$\hat{g}$-対である．語dには記号s_{q-k-2}が含まれていないことに注意しよう．

2.5 記号平面

ダリン・ミース・スターリング[13]が導入した$(\hat{x},\hat{y})$平面（記号平面）で定義された可逆馬蹄写像$\hat{T}$を利用すると，コードの情報だけで周期軌道が描ける．記号平面における可逆馬蹄写像$\hat{T}$を紹介する．

$$\hat{x}_{n+1}=2\hat{x}_n,\ \ \hat{y}_{n+1}=\hat{y}_n/2,\ (0\le\hat{x}_n\le 1/2) \tag{9}$$

$$\hat{x}_{n+1}=2-2\hat{x}_n,\ \ \hat{y}_{n+1}=1-\hat{y}_n/2.\ (1/2<\hat{x}_n\le 1) \tag{10}$$

可逆馬蹄写像$\hat{T}$における不動点は$\hat{P}=(0,0)$と$\hat{Q}=(2/3,2/3)$である．これらが相平面における不動点PとQに対応する．$(\hat{x},\hat{y})$平面$(0\le\hat{x}\le 1,\ 0\le\hat{y}\le 1)$は記号平面と呼ばれる．$\hat{x}$座標は右向きに，$\hat{y}$座標は下向きに取って軌道点を描く．このようにして描くことで相平面での軌道との対応がつきやすい（図4を参照のこと）.

可逆馬蹄写像は面積保存で方向保存でもある．可逆であることより，写像は二つの対合$\hat{h}$と$\hat{g}$の積で書ける．

$$\hat{T}=\hat{h}\circ\hat{g} \tag{11}$$

対合の具体的な作用を示す．

$$\begin{aligned}
&\hat{h}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{y}\\ \hat{x}\end{pmatrix},\\
&\hat{g}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{y}/2\\ 2\hat{x}\end{pmatrix},\qquad (0\le\hat{x}\le 1/2)\\
&\hat{g}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\hat{y}/2\\ 2-2\hat{x}\end{pmatrix}.\quad (1/2<\hat{x}\le 1)
\end{aligned} \tag{12}$$

対合$\hat{h}$の不動点の集合を対称線$\hat{S}_h$とし，対合$\hat{g}$の不動点の集合を対称線$\hat{S}_g$とする．

$$\hat{S}_h=\{(\hat{x},\hat{y})\ :\ \hat{y}=\hat{x}\} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_g=\{(\hat{x},\hat{y})\ :\ &\hat{y}=2\hat{x}\ \text{ if }\ 0\le\hat{x}\le 1/2;\\ &\hat{y}=2-2\hat{x}\ \text{ if }\ 1/2<\hat{x}\le 1\}.\end{aligned} \tag{14}$$

例として対称周期軌道のコード0001001を利用して記号平面で軌道点を描く方法を紹介する．記号列は下記のように得られる．

$$\cdots 0001001_{\bullet}0001001\cdots. \tag{15}$$

この表現では，000の直前に小数点（$_\bullet$）を挿入した．小数点の直後の記号0で記述される軌道点を$\hat{z}_0=(\hat{x}_0,\hat{y}_0)$とする．

小数点の右側を左から右へと読んで$_\bullet(0001001)^\infty$と書く．これを二進法写像の表現に変換し，$\hat{z}_0$の$\hat{x}$座標が得られる（変換規則2.5を見よ）.

$$\hat{x}_0={}_\bullet\,(0001110)^\infty=14/127. \tag{16}$$

次に小数点の左側を右から左へと読んで$_\bullet(1001000)^\infty$と書く．これを二進法写像の表現に変換し，$\hat{z}_0$の$\hat{y}$座標が得られる．

$$\hat{y}_0={}_\bullet\,(1110000)^\infty=112/127. \tag{17}$$

最後に，軌道点$\hat{z}_0=(14/127,112/127)$に次々と$\hat{T}$を作用して一周期分の軌道点を求め記号平面に軌道点を描く．

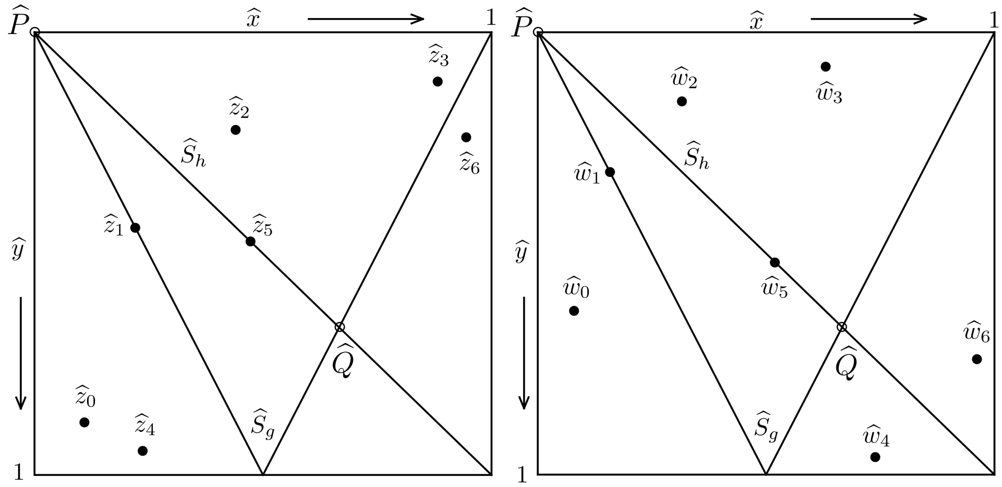

図4：(a) コード0001001の軌道：$\widehat{z}_0$ = (14/127, 112/127), $\widehat{z}_1$ = (28/127, 56/127), $\widehat{z}_2$ = (56/127, 28/127), $\widehat{z}_3$ = (112/127, 14/127), $\widehat{z}_4$ = (30/127, 120/127), $\widehat{z}_5$ = (60/127, 60/127), $\widehat{z}_6$ = (120/127, 30/127). (b) コード0001111の軌道: $\widehat{w}_0$ = (10/127, 80/127), $\widehat{w}_1$ = (20/127, 40/127), $\widehat{w}_2$ = (40/127, 20/127), $\widehat{w}_3$ = (80/127, 10/127), $\widehat{w}_4$ = (94/127, 122/127), $\widehat{w}_5$ = (66/127, 66/127), $\widehat{w}_6$ = (122/127, 94/127). 楕円型不動点$\widehat{Q}$= (2/3, 2/3). 記号平面 ($0 \le \hat{x} \le 1, 0 \le \hat{y} \le 1$).

結果は図4 (a) に示した．コード0001001とサドルノード対をなすもう一つの対称周期軌道のコード0001111の軌道点も図4 (b) に載せた．

3　サドルノード分岐で生じた対称周期軌道のコードの正規表現と *d*- 偶奇性

サドルノード分岐で生じた対称周期軌道の周期倍分岐を調べるために，生じた対称周期軌道の安定性を判断する必要がある．そのための準備としてサドルノード分岐で生じた対称周期軌道のコードの正規表現と*d*-偶奇性を導入する．

例として，サドルノード分岐で生じた対称周期軌道AとBのコードとしてσ_A = 00111とσ_B = 00101を考える．サドルノード分岐で生じた周期5の対称軌道である．σ_Aの偶奇性は奇である．よってこの軌道は楕円型で周期倍分岐を起こして反転サドルとなる．一方のσ_Bの偶奇性は偶である．よってサドル型軌道であることが分かる．つまり偶奇性だけで安定性が決まる例である．

二つ目の例として，サドルノード分岐で生じた周期7の対称軌道CとDのコードσ_C = 0001001とσ_D = 0001111を考える．これらの偶奇性は共に偶であるため偶奇性のみで安定性を決められない．このような場合にコードの情報だけで周期軌道の安定性を決める判定方法が必要となる．

サドルノード分岐で二つの対称周期軌道$O(z_0)$と$O(w_0)$が生じたとする．安定多様体の弧$T^{-1}\Gamma_s$（領域V_0とV_1の境界をなす弧）の侵入によって，軌道点z_nは領域V_0へ，軌道点w_nは領域V_1へと分離されるとしよう．結果，軌道点z_nとgz_nの記号は0，軌道点w_nとgw_nの記号は1となる（図5を参照）．対称軌道であるから，gz_nは$O(z_0)$の軌道点であり，gw_nは$O(w_0)$の軌道

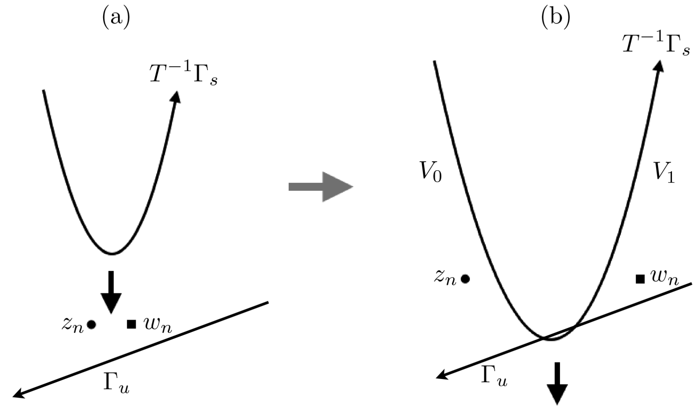

図5：安定多様体の弧$T^{-1}\Gamma_s$による，軌道点$z_n \in V_0$と$w_n \in V_1$の分離.

点である．$z_n = gz_n$，$w_n = gw_n$が成り立つ場合もある．

次に記号平面で左へ引き返す点（LTP）とLTP点の一つ前の点（P-LTP）を定義する．三つの軌道点$\hat{z}_{k-1} = (\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{k-1})$，$\hat{z}_k = (\hat{x}_k, \hat{y}_k)$，$\hat{z}_{k+1} = (\hat{x}_{k+1}, \hat{y}_{k+1})$について，$\hat{x}_{k-1} < \hat{x}_k$かつ$\hat{x}_{k+1} < \hat{x}_k$が成り立てば$\hat{z}_k$を左へ引き返す点（LTP）と名付ける．LTP点の一つ前の軌道点が$\hat{x} = 1/2$に近接している．LTP点の一つ前の軌道点をP-LTP点と名付ける．P-LTP点の個数はコードの回転回数pと等しい．$p = 3$の場合のP-LTP点の配置の模式図を図6に示した．

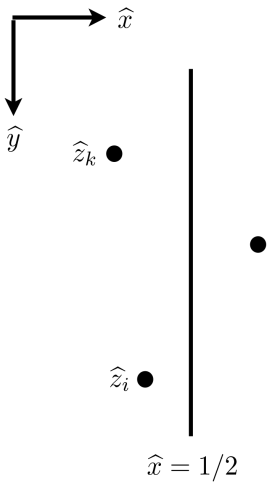

図6：記号平面でのP-LTP点．$p = 3$の場合，3個のP-LTP点$(\hat{z}_i, \hat{z}_j, \hat{z}_k)$が存在する．

サドルノード対をなすコードの正規表現を導入する．例を利用して説明する．$\sigma_A = 0001111 = E(1/4)D(1/3)$と$\sigma_B = 0001001 = E(1/4)E(1/3)$は最小値表現（図7）である（記号平面での軌道は図4を見よ）．

以下の手順で正規表現に変更する．

（1）$\sigma_A = s_0 s_1 \cdots s_5 s_6$．$s_6$の軌道点$\hat{z}_6$はLTP点．$s_5$の軌道点$\hat{z}_5$はP-LTP点．$\hat{z}_4 = \hat{g}\hat{z}_5$が成り立つ．よって$s_4$を先頭にした表現1110001を用意する．先頭の1を0へ，二つ目の1を0へと変更する．コード0010001が得られる．これはσ_Bである（記号の巡回を認める）．

$\sigma_B = t_0 t_1 \cdots t_5 t_6$．$t_6$の軌道点$\hat{w}_6$はLTP点．$t_5$の軌道点$\hat{w}_5$はP-LTP点．$\hat{w}_4 = \hat{g}\hat{w}_5$が成り立つ．この場合，$\hat{w}_4$と$\hat{w}_5$が$\hat{g}$-対である．定義2.9（2）と同様にして$d$は$d = t_4 = 0$と定義する．もし$\hat{w}_2 = \hat{g}\hat{w}_5$ならば，$\hat{w}_2$と$\hat{w}_5$が$\hat{g}$-対となり，$d$は$d = t_2 t_3 t_4$と定義される．

次にt_4を先頭にした表現0010001を用意する．先頭の00を11と変更する．コード1110001が得られる．これはσ_Aである（記号の巡回を認める）．σ_Aのdは$d = 1$である．

(2) (1) で行なった手順でσ_Aとσ_Bが入れ替わる．このような表現111000をσ_Aの正規表現と名付け，0010001をσ_Bの正規表現と名付ける．

次に，$\sigma_A = 0001 \cdot 001 \cdot 001 = E(1/4)E(1/3)E(1/4)$と$\sigma_B = 0001 \cdot 111 \cdot 001 = E(1/4)D(1/3)E(1/4)$の正規表現への書き換え方法を示す（図8）．

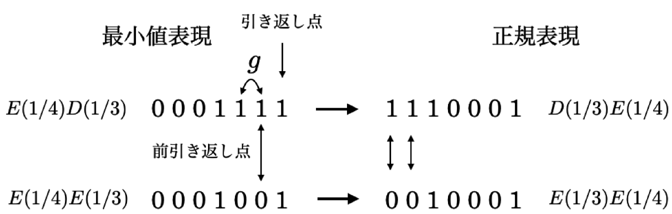

図7：最小値表現から正規表現への変更方法．

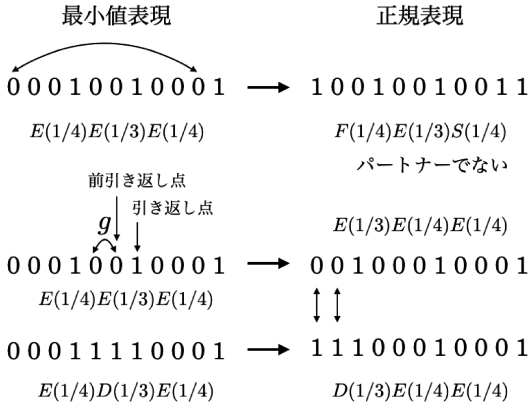

図8：最小値表現から正規表現への変更方法．

(1) $\sigma_A = s_0 s_1 \cdots s_9 s_{10}$．$s_{10}$の軌道点$\hat{z}_{10}$はLTP点．$s_9$の軌道点$\hat{z}_9$はP-LTP点．$\hat{z}_0 = \hat{g}\hat{z}_9$が成り立つ．$s_0$を先頭にした表現は$\sigma_A$である．$s_0$と$s_9$を1にすると，10010010011が得られる．これはσ_Bではない．$\sigma_B = t_0 t_1 \cdots t_9 t_{10}$．$t_{10}$の軌道点$\hat{w}_{10}$はLTP点．$t_9$の軌道点$\hat{w}_9$はP-LTP点．$\hat{w}_0 = \hat{g}\hat{w}_9$．$t_0$を先頭にした表現は$\sigma_B$である．$t_0$と$t_9$を1にすると，10011110011が得られる．これはσ_Aではない．

(2) σ_Aの軌道点$\hat{z}_6$もLTP点．s_5の軌道点$\hat{z}_5$はP-LTP点．$\hat{z}_4 = \hat{g}\hat{z}_5$が成り立つ．$s_4$を先頭にした表現は00100010001である．$s_4$と$s_5$を1に変更すると，11100010001．これは$\sigma_B$である．$\sigma_B$の軌道点$\hat{w}_6$もLTP点．$t_5$の軌道点$\hat{w}_5$はP-LTP点．$\hat{w}_4 = \hat{g}\hat{w}_5$が成り立つ．$t_4$を先頭にした表現は11100010001である．$t_4$と$t_5$を0に変更すると，00100010001が得られる．これはσ_Aである．これらよりσ_Aのdは$d=0$と，σ_Bのdは$d=1$と決まる．

(3) (2) で行なった手順でσ_Aとσ_Bが入れ替わる．このような表現00100010001をσ_Aの正規表現と名付け，11100010001をσ_Bの正規表現と名付ける．

P-LTP点の個数はp個であるから有限回の手順で作業は終了し，正規表現が決まる．結果として語dとd-偶奇性も決まる．四種類の例における最小値表現とその正規表現等を表1に示した．コードとしてブロックコード表現（付録Aを参照のこと）と通常のコード表現を載せた．Pは偶奇性（Parity）を，d-Pはd-偶奇性を表す．「直後」はサドルノード分岐が生じた直後の対称周期軌道の安定性を意味する．Sはサドル型を，Eは楕円型を意味する．サドルノード分岐で生じた対称周期軌道の安定性の決定方法は第4.3節で与える．

4 周期倍分岐の分類

4.1 周期倍分岐の生じ方

周期倍分岐の生じ方を固有方程式(7)の係数$r_q(a)$を利用してまとめておく．まず図9（a）の場合．母楕円型軌道が生じた後，パラメータaの増加に伴い係数$r_q(a)$は2から減少する．関係$r_q(a) = -2$を満たすaの値で，通常の周期倍分岐によって周期$2 \times q$の楕円型娘軌道がひとつ生じる．そのときに母軌道は反転を伴うサドル型（反転サドル型）となる．

図9（b）では，母楕円型軌道が通常の周期倍分岐を起こした後，反周期倍分岐を起こして再び楕円型に戻る．反周期倍分岐では，周期$2 \times q$のサドル型娘軌道がひとつ生じる．パラメータaがさらに増加すると，係数$r_q(a)$は-2から増加し$r_q(a) = 2$に至り，そこで同周期分岐を起こす．同周期分岐では周期qの非対称楕円型娘軌道が二個生じる．母軌道はサドル型となる．

図9（c）では，母軌道は誕生直後はサドル型である．

表1

例の名称	最小値表現	正規表現	d	P	d-P	直後
1-A	$E(1/4)E(1/3)$	$E(1/3)E(1/4)$	0	偶	偶	S
	0001 · 001	001 · 0001				
1-B	$E(1/4)D(1/3)$	$D(1/3)E(1/4)$	1	偶	奇	E
	0001 · 111	111 · 0001				
2-A	$E(1/3)S(1/2)S(1/2)$	$S(1/2)S(1/2)E(1/3)$	11	奇	偶	E
	001 · 11 · 11	11 · 11 · 001				
2-B	$E(1/3)E(1/2)E(1/2)$	$E(1/2)E(1/2)E(1/3)$	01	奇	奇	S
	001 · 01 · 01	01 · 01 · 001				
3-A	$E(1/4)E(1/3)E(1/4)$	$E(1/3)E(1/4)E(1/4)$	0	奇	偶	E
	0001 · 001 · 0001	001 · 0001 · 0001				
3-B	$E(1/4)D(1/3)E(1/4)$	$D(1/3)E(1/4)E(1/4)$	1	奇	奇	S
	0001 · 111 · 0001	111 · 0001 · 0001				
4-A	$E(1/4)E(1/3)E(1/3)E(1/4)$	$E(1/3)E(1/3)E(1/4)E(1/4)$	0010	偶	奇	E
	0001 · 001 · 001 · 0001	001 · 001 · 0001 · 0001				
4-B	$E(1/4)S(1/3)F(1/3)E(1/4)$	$S(1/3)F(1/3)E(1/4)E(1/4)$	1010	偶	偶	S
	0001 · 101 · 011 · 0001	101 · 011 · 0001 · 0001				

パラメータaの増加に伴い，係数$r_q(a)$は2から増加するが，増加が止まり減少する．関係$r_q(a) = 2$を満たすaの値で，母軌道は反同周期分岐を起こす．この分岐では周期qの非対称サドル型娘軌道が二個生じる．分岐後，母軌道は楕円型となる．次に，母楕円型軌道は関係$r_q(a) = -2$を満たすaの値に至って通常の周期倍分岐を起こす．この分岐で周期$2 \times q$の楕円型娘軌道がひとつ生じる．周期倍分岐の後，母軌道は反転サドル型となる．

4.2　娘周期軌道点の移動の仕方

周期倍分岐で生じた娘軌道点はパラメータの増加につれて移動する．その移動の仕方を二つのタイプに分類しよう．ここでは周期qの対称娘軌道を考える．コードを正規表現$s_0\, s_1 \cdots s_{q-k-2} \cdots s_{q-1}$で書く．$s_0$に対応する軌道点が$z_0$で，$s_{q-k-2}$に対応する軌道点が$z_{q-k-2} = T^{q-k-2}z_0$であることに注意しよう．ここで$z_{q-k-2} = gz_0$が成り立つ．正規表現の定義より，軌道点$z_{q-k-2}$が領域$V_0$と$V_1$の境界をなす安定多様体の弧$T^{-1}\Gamma_s$に最近接している．軌道点$z_0$と$z_{q-k-2}$を近接軌道点対と呼ぶ．

近接軌道点対が領域V_0（またはV_1）にあり，周期倍分岐よってこれらから生じた娘周期軌道点が領域V_1（またはV_0）に移動する場合を本論文で検討し記号則を導く．

移動する娘軌道点の個数は一個の場合と，二個の場合がある．ここでは二個移動する場合の移動の仕方について説明する．この二個はS_gについて対称な位置にある．一個移動する例は第4.1節で議論する．この一個は対称線上の点である．周期qの対称軌道が周期倍分岐を起こして軌道点z_0から娘軌道点ξ_0とξ_qが生じたとする（ξ_0はξ_qの右とする）．娘軌道の周期は$2 \times q$である．軌道点z_{q-k-2}から娘軌道点$g\xi_0$と$g\xi_q$が生じる．図10（a）のように$\xi_{q-k-2} = g\xi_0$と$\xi_{2q-k-2} = g\xi_q$が成り立つ場合，周期倍分岐が生じた直後にξ_0からξ_qへの左向きの微小ベクトルvを置

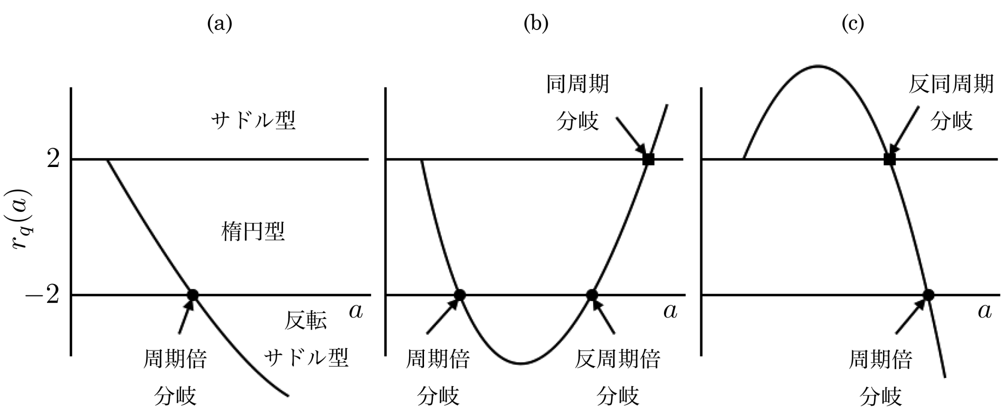

図9：分岐に伴う係数$r_q(a)$のa依存性の模式図．（a）通常の周期倍分岐が生じる場合．（b）通常の周期倍分岐，反周期倍分岐，同周期分岐の順に分岐が生じる場合．（c）反同周期分岐が生じ，次に通常の周期倍分岐が生じる場合．

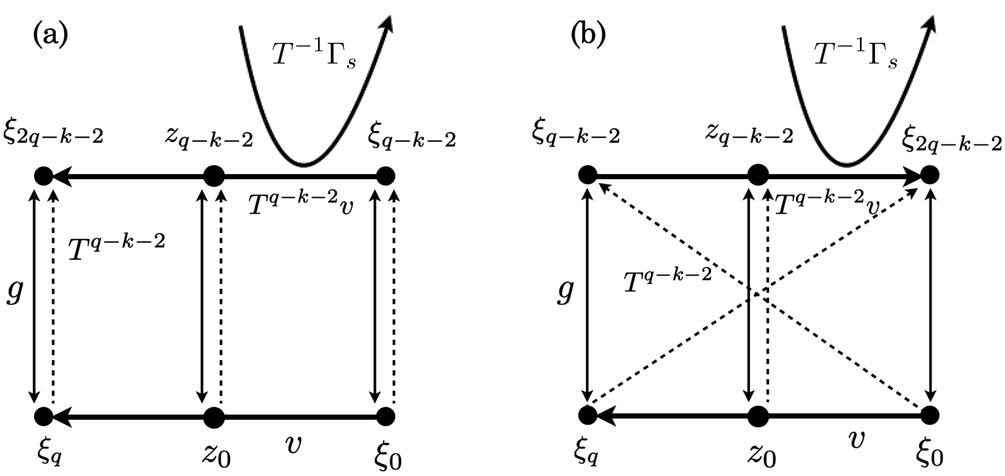

図10：保存型移動（a）と反転型移動（b）の模式図．実線の矢印は対合gによる軌道点の動きを表し，点線の矢印は写像T^{q-k-2}による軌道点の動きを表す．

く（図（a））．これの像$T^{q-k-2}v$も左向きである．方向が（ほとんど）変わらないことより，周期倍分岐で娘軌道点の**保存型移動**が生じたということにする．図（a）では領域V_0とV_1の境界をなす安定多様体の弧$T^{-1}\Gamma_s$が軌道点z_{q-k-2}と娘軌道点ξ_{q-k-2}の間に入り込む場合を描いた．図10（b）では，軌道点z_0から娘軌道点ξ_0とξ_qが生じ，軌道点z_{q-k-2}から娘軌道点$\xi_{2q-k-2} = g\xi_0$と$\xi_{q-k-2} = g\xi_q$が生じる．周期倍分岐が生じた直後に図（b）のように左向きの微小ベクトルvを置く．この像$T^{q-k-2}v$の方向は右向きである．方向が約180度回転することから，周期倍分岐で娘軌道点の**反転型移動**が生じたということにする．性質2.3（5）より，楕円型周期軌道のコードが偶の場合，周期倍分岐を起こすならば必ず次に反周期倍分岐を起こす．そして，周期倍分岐のタイプは保存型移動で，反周期倍分岐のタイプは反転型移動である．

4.3　対称周期軌道の分類

対称周期軌道を偶奇性とd-偶奇性をもとに分類しよう．ここで考えている対称周期軌道は制限1.5に含まれている対称周期軌道である．

表2の「馬蹄中」は馬蹄の中での対称周期軌道の安定性である．表の分岐名に下線を引いた分岐のタイプは方向反転型である．残りは方向保存型である．次にそれぞれの型について説明する．

A型. A型の周期軌道が生じたときサドル型であることを簡単に示す．この周期軌道が生じたとき楕円型とする．コードの偶奇性が偶であるから，最初に周期倍分岐を起こし，次に反周期倍分岐を起こす．d-偶奇性が偶であるから，反周期倍分岐と同周期分岐は方向保存型．これは同周期分岐が方向反転型であることに反する．つまりA型の周期軌道が生じたときサドル型で馬蹄の中でもサドル型である．

B型. コードの偶奇性が偶でd-偶奇性が奇であるから，この周期軌道は生じた直後は楕円型で，周期倍分岐を起こし反転を伴うサドル型になる．次に反周期倍分岐を起こし楕円型に戻る．最後に同周期分岐を起こしてサドル型になる．反周期倍分岐と同周期分岐は方向反転型である．図9（b）を参照のこと．

C型. コードの偶奇性が奇でありかつd-偶奇性が偶であるから，この周期軌道は方向保存型の周期倍分岐を起こし馬蹄中では反転を伴うサドル型となる．図9（a）を参照のこと．

D型. コードの偶奇性が奇であるから，周期倍分岐を起こし反転を伴うサドル型になる．d-偶奇性が奇であるから，周期倍分岐は方向反転型である．これらのことより周期軌道が生じた直後はサドル型であり，反同周期分岐と周期倍分岐の順に分岐を起こす．図9（c）を参照のこと．

5　周期倍分岐で生じた対称周期軌道の記号則

5.1　楕円型不動点Qの周期倍分岐

楕円型不動点Qの周期倍分岐で生じた娘軌道の記号則$\langle Q \rangle$を導く．楕円型不動点Qのd-偶奇性は奇であるから，表2における分類ではQはC型に分類される．最初に図11を利用して，楕円型不動点Qから生じた周期2，周期4並びに周期8の軌道点の位置関係を説明しよう．$a = 4$でQが周期倍分岐を起こし娘軌道点z_0とz_1が対称線S_g上に生じる．娘軌道点z_0は$y < 0$に，z_1は$y > 0$にある．aを増やすと娘軌道点z_0は左に移動し，馬蹄の中では領域V_0に入る．娘軌道点z_1は領域V_1にある．次に娘軌道点z_0が周期倍分岐を起こし娘軌道点ξ_0とξ_2が生じる．娘軌道点ξ_0は右に移動し，馬蹄の中では領域V_1に入る．娘軌道点ξ_0が周期倍分岐を起こし娘軌道点η_0とη_4が生じる．娘軌道点η_0は左に移動し領域V_0に入る．安定多様体の弧$T^{-1}\Gamma_s$は軌道点η_0とξ_0の間を通過する．このように生じた娘軌道点の1個だけが領域間を移動する．この場合は一次元写像における娘軌道点の移動の仕方と同じである．

軌道点z_0より出発すると周期2のコードは$P_1 = 01$と得られる．軌道点ξ_0より出発すると周期4のコード

表2

型	偶奇性	d-偶奇性	直後	馬蹄中	分岐過程
A	偶	偶	サドル型	サドル型	-
B	偶	奇	楕円型	サドル型	周期倍分岐 → 反周期倍分岐 → 同周期分岐
C	奇	偶	楕円型	反転サドル型	周期倍分岐
D	奇	奇	サドル型	反転サドル型	反同周期分岐 → 周期分岐

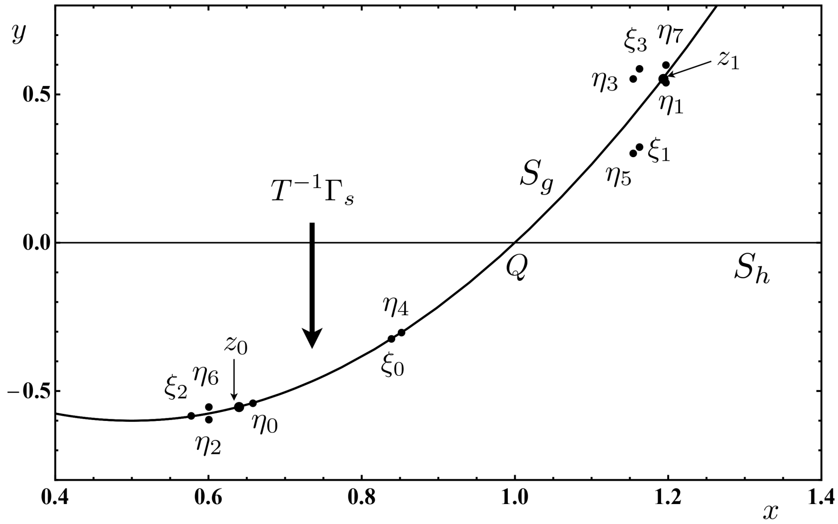

図11：楕円型不動点Qから生じた周期2 (z_0, z_1, $P_1 = 01$)，周期4 (ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3, $P_2 = 1101$) 並びに周期8 (η_0, η_1, $\cdots$, η_7, $P_3 = 01011101$) の軌道点．$a = 4.8$.

は$P_2 = 1101$となる．周期8のコードは$P_3 = 01011101 = P_1P_1P_2$である．この手順を繰り返すことで記号則$\langle Q\rangle$が得られる．記号則$\langle Q\rangle$には$P_0 = 1$を追加した．

記号則 $\langle Q\rangle$.
$P_0 = 1$，$P_1 = 01$とする．$n \geq 1$において下記の記号則が成り立つ．

$$P_{n+1} = P_{n-1}P_{n-1}P_n. \tag{18}$$

記号則$\langle Q\rangle$は置き換え規則$\langle\langle Q\rangle\rangle$ [13]に書き換えることができる．'$1 \to 01$' は，1を01に置き換えることを意味している．

置き換え規則 $\langle\langle Q\rangle\rangle$.
$1 \to 01$, $0 \to 11$.

節の終わりに二点指摘しておきたい．
(1) 記号則$\langle Q\rangle$で決まるコードは，すべて正規表現になっていること．
(2) 置き換え規則$\langle\langle Q\rangle\rangle$の証明は参考文献[13]にはない．本論文で，記号則$\langle Q\rangle$を導出した結果として置き換え規則$\langle\langle Q\rangle\rangle$が正しいことが証明されたこと．

5.2　保存型移動の場合の記号則

周期倍分岐で生じた娘周期軌道の移動の仕方が保存型移動の場合における記号則を与える．周期qの対称母軌道が周期倍分岐を起こしたとする．ここではz_0が閉領域V_0に属する場合を考える．z_0が閉領域V_1に属する場合も同様に扱うことができる．

母軌道の正規表現P_0とする．

$$P_0 = s_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1}. \tag{19}$$

ここで記号s_0で記述される周期軌道点をz_0とし，記号s_{q-k-2}で記述される周期軌道点をz_{q-k-2}とする．これらの軌道点について$z_{q-k-2} = gz_0$が成り立つ（図12）．

母軌道点z_0が周期倍分岐を起こして，z_0からξ_0とξ_qが生じるとする．ここで，z_0と生じたξ_0の間に弧$T^{-1}\Gamma_s$が入り込み，これらを別々の領域に分ける．結果として，ξ_0はV_1に移動し，ξ_qはV_0にとどまる．軌道点$gz_0 = z_{q-k-2}$から$g\xi_0 = \xi_{q-k-2}$と$g\xi_q = \xi_{2q-k-2}$が生じる（図12）．ξ_0がV_1に移動すると同時にξ_{q-k-2}もV_1に移動する．つまり，軌道点ξ_0とξ_{q-k-2}の記号が同じである．一方のξ_{2q-k-2}はV_0にとどまる．ξ_{q-k-2}とz_{q-k-2}の間ならびにξ_0とz_0の間に弧$T^{-1}\Gamma_s$が入り込み，これらを別々の領域に分ける．

対称母軌道の正規表現P_0を二つ連続して書いたP_0P_0をもとにP_1を構成する．

$$\begin{aligned}P_0P_0 = {} & s_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots \\ & s_{q-1}\cdot s_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1}.\end{aligned} \tag{20}$$

ここで後半のP_0の添え字を修正する．

$$\begin{aligned}P_0P_0 = {} & s_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1}\cdot s_qs_{q+1}\cdots \\ & s_{2q-k-2}s_{2q-k-1}s_{2q-k}\cdots s_{2q-1}.\end{aligned} \tag{21}$$

ξ_0と$\xi_{q-k-2} = g\xi_0$はV_1にあり，ξ_qと$\xi_{2q-k-2} = g\xi_q$はV_0にあることをもとに，この表現を書き換えるとP_1が得られる．

$$\begin{aligned}P_1 = {} & \bar{s}_0s_1\cdots \bar{s}_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1}\cdot s_qs_{q+1}\cdots \\ & s_{2q-k-2}s_{2q-k-1}s_{2q-k}\cdots s_{2q-1}.\end{aligned} \tag{22}$$

ここで，$\bar{s}_0 = \bar{s}_{q-k-2} = 1$．また，$s_q = s_{2q-k-2} = 0$が成り立つことにも注意しよう．後半部分（中点 · より後ろ）はP_0そのものである．P_0の表現で，s_0とs_{q-k-2}を1に置

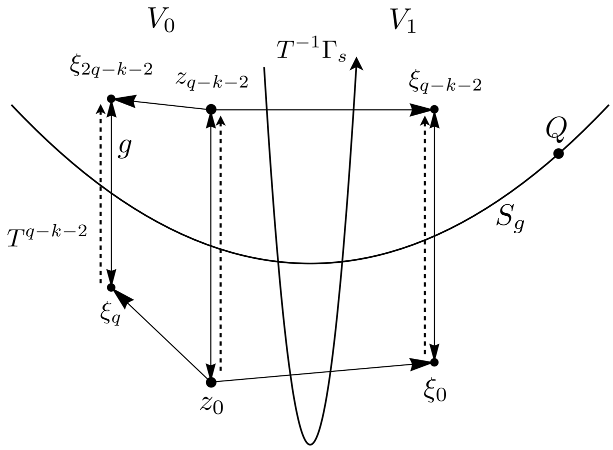

図12：保存型移動．$g\xi_0=\xi_{q-k-2}$と$g\xi_q=\xi_{2q-k-2}$が成り立つ場合．実線の矢印は対合gによる軌道点の動きを，点線の矢印はT^{q-k-2}による軌道点の動きを表している．

き換えた表現を$\hat{P}_0$とする．これらを利用するとP_1が決まる．

$$P_1=\hat{P}_0P_0 \tag{23}$$

コードP_0が奇なら，$\hat{P}_0$も奇である．コードP_0が偶なら，$\hat{P}_0$も偶である．つまり，どちらの場合もコードP_1は偶である．コードP_1が偶であるから，この娘軌道は周期倍分岐と反周期倍分岐を起こす．周期倍分岐のタイプは保存型移動で，反周期倍分岐のタイプは反転型移動である．反転型移動については第5.3節で議論する．

周期倍分岐で生じるP_2，P_3等を決めるためには上で述べた手順を繰り返し実行すればよい．記号則$\langle A\rangle$が得られる．記号則$\langle A\rangle$は記号則$\langle Q\rangle$を含む．

記号則 $\langle A\rangle$.
周期倍分岐のタイプが保存型移動の場合，対称楕円型娘軌道のコードP_n $(n\geq 1)$は以下の規則で決まる．ただし，対称楕円型母軌道の正規表現P_0が決まっていて，$\hat{P}_0$も決定されているとする．

$$P_1 = \hat{P}_0P_0, \tag{24}$$
$$P_{n+1} = P_{n-1}P_{n-1}P_n\ (n\geq 1). \tag{25}$$

5.3 反転型移動の場合の記号則

最初に周期倍分岐で生じた娘周期軌道の移動の仕方として反転型移動について説明する．次に記号則を導く．軌道点z_0は閉領域V_0にあるとする．ここでも軌道点z_0が閉領域V_1にある場合は省略する．対称母軌道の正規表現をP_0とする．

$$P_0=s_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1}. \tag{26}$$

周期倍分岐によって対称母軌道点z_0からξ_0とξ_qが生じるとする．ここで，ξ_0はV_1にあり，ξ_qはV_0にあるとする．次に，点gz_0が軌道点z_{q-k-2}であるとしよう（図13）．$gz_0=z_{q-k-2}$から周期倍分岐によってξ_{q-k-2}とξ_{2q-k-2}が生じる．ただし，$\xi_{2q-k-2}=g\xi_0$はV_1にあり，$\xi_{q-k-2}=g\xi_q$はV_0にあるとする．P_0P_0を用意して，添字の番号を通し番号に付け替える．

$$P_0P_0=s_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1}s_qs_{q+1}\cdots s_{2q-k-2}s_{2q-k-1}s_{2q-k}\cdots s_{2q-1}. \tag{27}$$

ξ_0と$\xi_{2q-k-2}=g\xi_0$がV_1にあり，ξ_qと$\xi_{q-k-2}=g\xi_q$がV_0にあることをもとに，この表現を書き換えるとP_1が得られる．

$$P_1=\bar{s}_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1}\cdot s_qs_{q+1}\cdots \bar{s}_{2q-k-2}s_{2q-k-1}s_{2q-k}\cdots s_{2q-1}. \tag{28}$$

ここで，$\bar{s}_0=\bar{s}_{2q-k-2}=1$，$s_q=s_{q-k-2}=0$.

次にP_0^lとP_0^rを定義する．

$$P_0^l=\bar{s}_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1}, \tag{29}$$
$$P_0^r=s_qs_{q+1}\cdots \bar{s}_{2q-k-2}s_{2q-k-1}s_{2q-k}\cdots s_{2q-1}. \tag{30}$$

これらを利用するとP_1の表現が簡潔になる．

$$P_1=P_0^lP_0^r. \tag{31}$$

記号則 $\langle B\rangle$.
対称楕円型母軌道の正規表現P_0と，P_0^l，P_0^rが決まっているとする．対称楕円型娘軌道のコードP_1は下記の規則で決まる．

$$P_1 = P_0^lP_0^r, \tag{32}$$
$$P_1^l = P_0^rP_0, \tag{33}$$
$$P_1^r = P_0^lP_0. \tag{34}$$

反周期倍分岐を考えている場合，コードP_1が決まった段階で手順を終了する．周期倍分岐を考えている場合，P_1の偶奇性を調べる．コードP_0を偶とする．P_0^lとP_0^rの偶奇性は奇である．コードP_0を奇とする．P_0^lとP_0^rの偶奇性は偶である．よって，コードP_1の偶奇

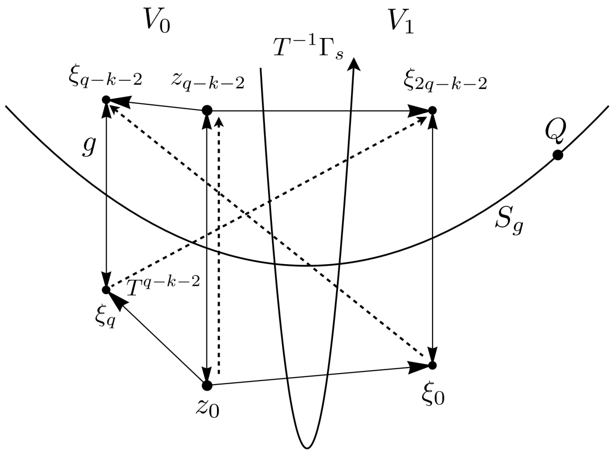

図13：反転型移動．$g\xi_0=\xi_{2q-k-2}$と$g\xi_q=\xi_{q-k-2}$が成り立つ場合．実線の矢印は対合gによる軌道点の動きを，点線の矢印はT^{q-k-2}による軌道点の動きを表している．

性は偶である．記号則$\langle A\rangle$をP_1に順次適用してP_2，P_3等が決まる．

最後に記号則$\langle C\rangle$を証明する．

記号則 $\langle C\rangle$.
コードP_0^lとP_0^rは，P_0をコードとする対称周期軌道が（反）同周期分岐を起こして生じる二つの非対称娘軌道のコードである．

証明.
ここでは同周期分岐の場合を証明する．反同周期分岐の場合も同様であるので証明は省く．

図14を利用する．同周期分岐により軌道点z_0から娘軌道点uとvが生じ，軌道点z_{q-k-2}から娘軌道点guとgvが生じたとする．$O(u)\neq O(v)$に注意しよう．$u=T^qu$と$v=T^qv$が成り立つ．もし，$T^{q-k-2}u=gu$が成り立つと，反転型移動の反周期倍分岐が生じたことになり矛盾である．これより，$T^{q-k-2}u=gv$が成り立つことがわかる．よって，$T^{q-k-2}v=gu$が成り立つ．

$O(z_0)$のコードを

$$P_0=s_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1} \tag{35}$$

とする．ただし，$s_0=s_{q-k-2}=0$.

軌道点uが領域V_0にあり，軌道点$T^{q-k-2}u$は領域V_1にあるから，$O(u)$のコードは

$$P_0^r=s_0s_1\cdots \bar{s}_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1} \tag{36}$$

と得られる．ただし，$\bar{s}_{q-k-2}=1$.

$O(v)$のコードは

$$P_0^r=\bar{s}_0s_1\cdots s_{q-k-2}s_{q-k-1}s_{q-k}\cdots s_{q-1} \tag{37}$$

と得られる．ただし，$\bar{s}_0=1$．以上で証明を終える．

5.4 記号則の利用例

最初に，楕円型不動点の回転分岐で生じる楕円型

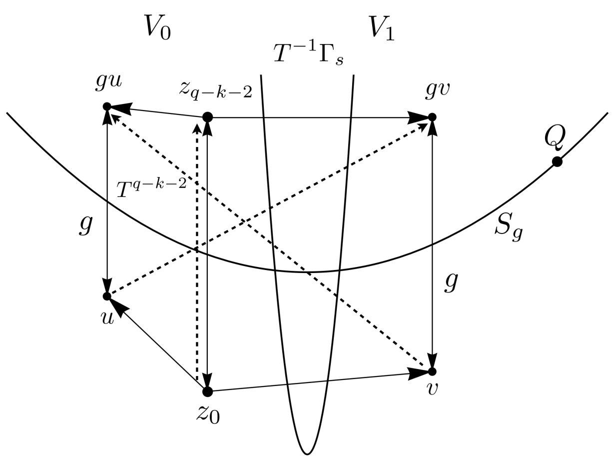

図14：同周期分岐で軌道点z_0より娘軌道点uとvが生じ，軌道点z_{q-k-2}より娘軌道点guとgvが生じた場合．実線の矢印は対合gによる軌道点の動きを，点線の矢印はT^{q-k-2}による軌道点の動きを表している．

周期軌道p/q-BEの周期倍分岐を調べる．ここでp/qは回転数を表す．つまり，一周期qの間に周期軌道が楕円型不動点Qの周りをp回まわる．p/q-BEにおけるp/qは既約分数である．p/q-BEのコード$E(p/q)$は$E(p/q)=0w01$の形式に書ける（付録Aの表3を見よ）．語wは偶で，$w=w^{-1}$（巡回は認めない）を満たす．よってd-偶奇性は偶．コード$0w01$は最小値表現である（教科書[6]のP.141）．先頭の記号0に対応する軌道点をz_0とし，後ろから二つ目の記号0に対応する軌道点をz_{q-2}とすると$z_{q-2}=gz_0$が成り立つから，$0w01$は正規表現でもある．楕円型周期軌道p/q-BEは表2のC型に含まれる．よって，$P_0=0w01$に記号則$\langle A\rangle$を適用して$P_1, P_2, \cdots$が順次決まる．

最も簡単な例を利用して保存型移動と反転型移動について説明する．$P_0=001$から$P_1=111001$が生じる．周期6のP_1は偶であるため，この楕円型周期軌道はB型に含まれる．よって，周期倍分岐が最初に生じ，次に反周期倍分岐が生じ，最後に同周期分岐が生じる．

最初に周期倍分岐に注目する．P_1が周期倍分岐を起こして生じた周期12のコードは$P_2=001001111001$である．周期12の軌道点z_kを相平面で描いた（図15（a））．数字kは軌道点z_kを意味する．軌道点z_0とz_1は馬蹄中では領域V_0にあり，軌道点z_6とz_7は馬蹄中では領域V_1にある．軌道点z_0から出発すると，コードP_2が得られる．図15（a）より，保存型移動の意味が理解できるであろう．

周期6が反周期倍分岐を起こして生じた周期12のサドル型娘対称周期軌道のコードは，記号則$\langle B\rangle$を利用してR_2が決まる．ここでは図15（b）よりR_2を導く．図（b）において周期6の軌道点からw_0とw_6が生じる（図（b）では0と6と略記した）．ここでw_0は左に移動しV_0に入る．同様に生じたw_1とw_7のうち，w_7が左に移動しV_0に入る．P_1を二つ並べた$111001111001=t_0t_1\cdots t_{11}$を用意する．ここで$t_0=t_7=0$と置き換えると，011001101001が得られる．これがR_2である．

周期6が同周期分岐を起こして生じた周期6のコードは，記号則$\langle C\rangle$を利用して$P_1^l=011001$と$P_1^r=110001$と得られる．これらのコードより同周期分岐を起こして

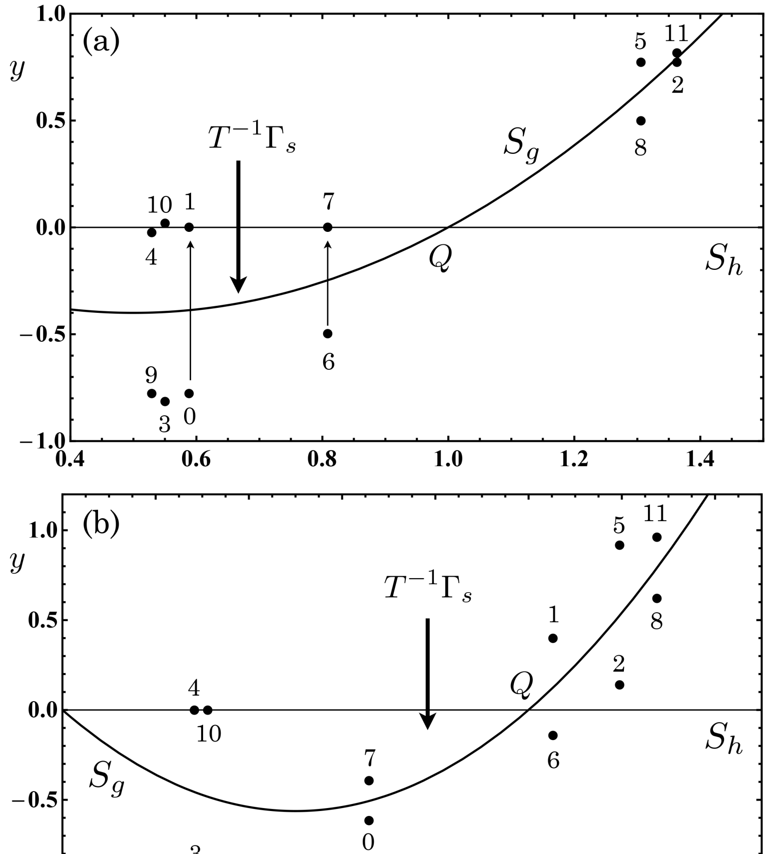

図15：(a) 周期倍分岐で生じた対称楕円型周期軌道．$q=12$．数字kは軌道点z_kを意味する．$P_2=001001111001$．$a=3.2$．(b) 反周期倍分岐で生じた対称サドル型周期軌道．$q=12$．数字kは軌道点w_kを意味する．$R_2=011001101001$．$a=4.5$．

生じた周期軌道は非対称周期軌道であることがわかる．

次に，サドルノード分岐で生じたコード0010101と0011111の対称周期軌道について調べる．コード0010101の偶奇性は奇でd-偶奇性（$d = 01$）も奇である．この周期軌道はサドルノード分岐で生じた直後はサドル型周期軌道である．その後，反同周期分岐を起こして楕円型周期軌道になる．このような分岐過程を考慮すると周期軌道はD型に含まれる．反同周期分岐で生じたサドル型非対称娘軌道の周期は母軌道の周期と等しい．記号則$\langle C\rangle$，これらのコードは$A = 0010111$と$B = 0011101$と得られる．また，$A = B^{-1}$（巡回を認める）が成り立つことにも注意しよう．この軌道は最後に周期倍分岐を起こす．このコードの正規表現は$P_0 = 0101001$．これの偶奇性は奇で，d-偶奇性は奇であるから，記号則$\langle B\rangle$が利用できる．ここで，$P_0^l = 1101001$．$P_0^r = 0111001$．P_0^lがBで，P_0^rがAである(巡回を認める)．

図16（a）はコードP_0の軌道点である．P_0の先頭の記号に対応する軌道点z_0を，図（a）では0と記してある．ここで$z_2 = gz_0$が成り立つ．二点z_0とz_2は領域V_0にある．コードP_1の先頭の記号に対応する軌道点w_0を，図16（b）では0と記してある．ここで$w_9 = gw_0$と$w_2 = gw_7$が成り立つ．二点w_7とw_2は領域V_0に留まり，反転型移動で二点w_0とw_9が領域V_1に移動する．ここでP_0を二つ並べた01010010101001を用意する．この先頭の記号を1と変更する． 先頭を0番目すると，9番目の記号も1となる．2番目と7番目の記号0はそのままとする．以上より$P_1 = 1101001 \cdot 0111001 = P_0^l P_0^r$が得られる．$P_1$は偶であり，$P_1$は正規表現であるから，記号則$\langle A\rangle$を利用して$P_2$，$P_3$等を決定する．

次にコード$P_0 = 1111001$で記述される対称周期軌道

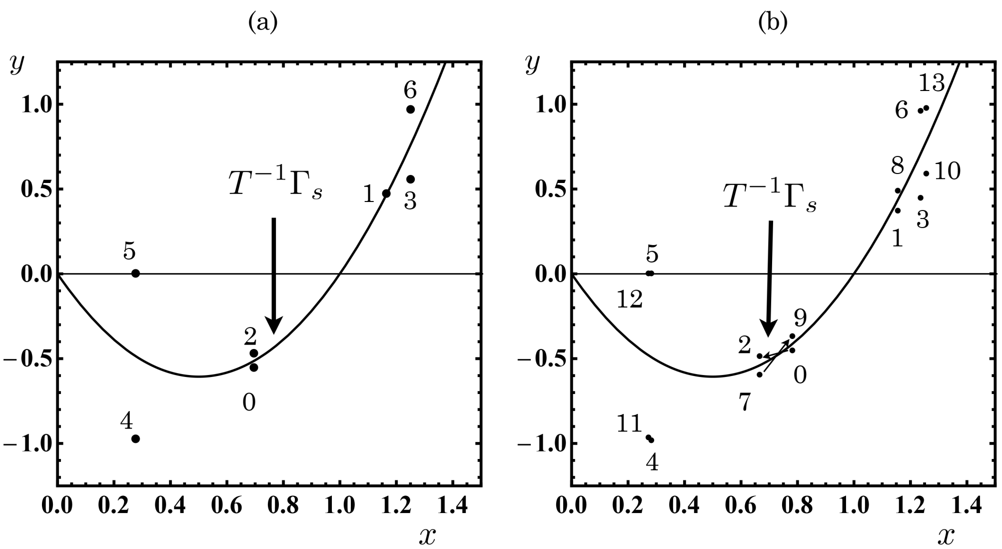

図16：（a）コード$P_0 = 0101001$．$q = 7$．（b）反転型移動．コード$P_1 = P_0^l P_0^r = 1101001 \cdot 0111001$．$q = 14$．太い矢印で示したあたりに安定多様体の弧$T^{-1}\Gamma_s$が入り込む．$a = 4.85$.

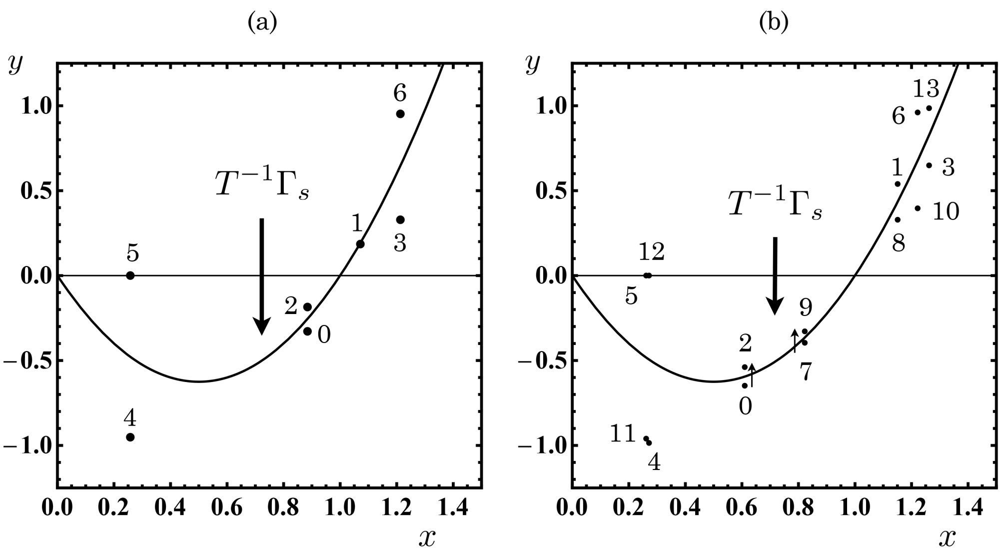

図17：（a）コード$P_0 = 1111001$．$q = 7$．（b）保存型移動．コード$P_1 = 0101001 \cdot 1111001$．$q = 14$．太い矢印で示したあたりに安定多様体の弧$T^{-1}\Gamma_s$が入り込む．$a = 5$.

の性質を議論する．これの偶奇性は奇である．$d = 11$であるからd-偶奇性は偶となる．これらより，この周期軌道はC型に含まれる．この対称周期軌道は保存型移動の周期倍分岐を起こす．

記号則$\langle A\rangle$を利用して，娘軌道D_1のコードが$P_1 = 0101001P_0$と決まる．図17に母軌道と娘軌道を示した．図17（a）において，z_0（0と表示されている）より出発して軌道点を追うと，$P_0 = 1111001$が確認できる．軌道点z_0とz_2（図（a）では，0と2）は将来領域V_1に入る．つまり，これらの軌道点の左側に境界$T^{-1}\Gamma_s$が入り込む．

次にP_1を確認しよう．図17（b）において，w_0（0と表示されている）より出発して軌道点を追うと，$P_1 = 0101001 \cdot 1111001$が確認できる．軌道点$w_0$と$w_2$は将来領域$V_0$に入る．軌道点$w_7$と$w_9$は将来領域$V_1$になる領域に残る．軌道点$z_2$と$w_9$（$z_0$と$w_7$）の間に境界$T^{-1}\Gamma_s$が侵入し，これらを分離する．保存型移動の周期倍分岐であることを考慮してコードP_1が得られる．コードP_1の偶奇性は偶であるから記号則$\langle A\rangle$を利用して，P_2，P_3等の決定が行える．また，記号則$\langle B\rangle$より，R_2，R_3等の決定も行える．

コード$\sigma_A = 0010101$の周期軌道とコード$\sigma_B = 0011111$の周期軌道の分岐現象の違いを検討する．コードσ_Aの周期軌道が反同周期分岐を起こし楕円型になる過程を図18に示した．図18（a）はサドルノード分岐が生じた直後の状況で，点ζ_0がコードσ_Bの軌道点を表していて，楕円型である．一方の軌道点z_0がコードσ_Aの軌道点で，サドル型である．軌道点z_0の安定多様体$W_s(z_0)$は不動点の安定多様体$W_s(P)$の方向とほぼ同じである．同様の性質が不安定多様体$W_u(z_0)$と不安定多様体$W_u(P)$についても成り立つ．対称線S_hにおいて区間(ζ_0, z_0)を考える．安定多様体$W_s(z_0)$と不安定多様体$W_u(z_0)$の方向を見ると，写像T^qによる流れは区間(ζ_0, z_0)の上部から下部へと流れることが導かれる（図18（a）の太い矢印）．つまり，軌道点ζ_0の周りは時計回りに回転している．

図18（b）は反同周期分岐が生じた直後である．二つの非対称サドル型軌道点u_0とv_0がz_0から生じる．サドル型軌道点u_0とv_0の安定多様体と不安定多様体に囲まれた四辺形の中にz_0がある．z_0の回転方向は反時計回りであることに注意しよう．

6　結語

本論文で得られた結果を簡単にまとめる．

(1) 周期倍分岐で生じた娘周期軌道点の移動の仕方として，1個移動型，保存型移動，反転型移動を定義した．次に，コードの記法として正規表現を導入し，新しくd-偶奇性という偶奇性を導入した．コードの偶奇性とd-偶奇性をもとに対称周期軌道を分類した．

(2) 周期倍分岐で生じた対称娘軌道のコードを決定する記号則$\langle A\rangle$と記号則$\langle B\rangle$を導出した．母楕円型軌道のコードP_0の性質をもとに，記号則$\langle A\rangle$と記号則$\langle B\rangle$を使い分ける必要があることと，記号則$\langle B\rangle$を利用して反周期倍分岐で生じた対称娘サドル型軌道のコードも決定できることを示した．

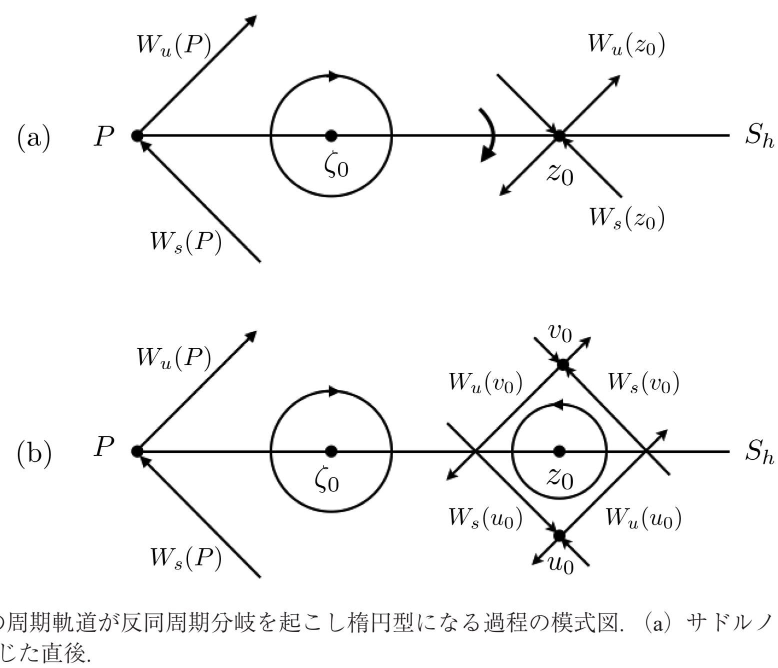

図18：コード0010101の周期軌道が反同周期分岐を起こし楕円型になる過程の模式図．（a）サドルノード分岐が生じた直後．（b）反同周期分岐が生じた直後．

(3) サドルノード分岐で生じた二つの対称周期軌道の安定性を判定する方法を導いた．これをもとに対称周期軌道の周期倍分岐（反周期倍分岐）で生じた対称娘サドル型軌道のコードを決定できることを示した．

(4) 母対称軌道が（反）同周期分岐を起こして生じた二つの非対称娘軌道のコードを決める記号則 $\langle C \rangle$ を導いた．

参考文献

[1] Devaney, R.: 2003, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Westview Press. 邦訳：カオス力学系入門 第2版 新訂版，後藤憲一その他訳.（共立出版，2003）

[2] Greene, J. M., MacKay, R. S., Vivaldi, F., and Feigenbaum, M. J.: 1981, Universal behavior in families of area-preserving maps, *Physica 3D*, 468–486. https://doi.org/10.1016/0167-2789(81)90034-8

[3] MacKay, R. S.: 1993, *Renormalisation in Area-Preserving Maps*, World Scientific.

[4] Robinson, C.: 1999, *Dynamical Systems* (Second edition), CRC Press. 邦訳：力学系（上，下），国府寛司その他訳.（シュプリンガー・フェアラーク東京，2001）

[5] Smale, S.: 1967, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 747–817. https://www.ams.org/journals/bull/1967-73-06/S0002-9904-1967-11798-1/S0002-9904-1967-11798-1.pdf

[6] 山口喜博，谷川清隆：2016，馬蹄への道，共立出版.

[7] Hao, B., and Zheng, W.: 2018, *Applied symbolic dynamics and chaos* (Second edition), World Scientific.

[8] Hénon, M.: 1969, Numerical study of quadratic area-preserving mappings, *Quart. Appl. Math.*, **27**, 291–312.

[9] Devaney, R., and Nitecki, Z.: 1979, Shift automorphisms in the Hénon mapping, *Comm. Math. Phys.*, **67**, 137–146.

[10] Wiggins, S.: 1990, *Introduction to applied dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag. 邦訳：非線形の力学系とカオス（上，下），丹羽敏雄監訳.（シュプリンガー・フェアラーク東京，1992）．スメールの馬蹄についての解説は下巻の第4章を見られたい.

[11] Hall, T.: 1994, *The creation of horseshoe*, *Nonlinearity*, **7**, 861–924. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/7/3/008/pdf

[12] Yamaguchi, Y., and Tanikawa, K.: 2011, A new interpretation of the symbolic codes for the Hénon map. II., *Prog. Theor. Phys.*, **125**, 435–471. https://doi.org/10.1143/PTP.125.435

[13] Dullin, H. R., Meiss, J. D., and Sterling, D.: 2005, Symbolic codes for rotational orbits, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.*, **4**, 515–562. https://doi.org/10.1137/040612877

付録 A　回転分岐で生じた p/q-BE のコード

表3に，楕円型不動点 Q の回転分岐で生じる p/q-BE $(3 \leq q \leq 13)$ のブロックコード $E(p/q)$ と，Q の周期倍分岐で生じる1/2-BEのブロックコード $E(1/2)$ を載せた．ブロックコード $E(p/q)$ の表現は最小値表現でありかつ正規表現でもある．表3において，1/3は1/3-BEを表す．$q \geq 3$ ならば，ブロックコード $E(p/q)$ は $E(p/q) = 0w01$（$w = w^{-1}$，巡回は認めない）と書ける．ただし，$q = 3$の場合，w は空集合．また，コード $E(p/q)$ の対称周期軌道とサドルノード対を構成する p/q-BS（サドル型周期軌道）のブロックコードは $F(p/q) = 0w11$（$F(p/q) = F^{-1}(p/q)$．巡回を認める）である．これら以外にブロックコード $S(p/q) = 1w01$ と $D(p/q) = 1w11$ がある．詳細は教科書[6] を見られたい．

表3　p/q-BEのコード．

p/q	$E(p/q)$	p/q	$E(p/q)$	p/q	$E(p/q)$	p/q	$E(p/q)$
1/2	01	2/7	$0^21^20^21$	3/10	$0^21^201^20^21$	5/12	01^401^401
1/3	0^21	3/7	01^401	1/11	$0^{10}1$	1/13	$0^{12}1$
1/4	0^31	1/8	0^71	2/11	$0^41^20^41$	2/13	$0^51^20^51$
1/5	0^41	3/8	01^201^201	3/11	$0^21^20^21^20^21$	3/13	$0^31^20^21^20^31$
2/5	01^201	1/9	0^81	4/11	$01^201^201^201$	4/13	$0^21^201^201^20^21$
1/6	0^51	4/9	01^601	5/11	01^801	5/13	$01^201^401^201$
1/7	0^61	1/10	0^91	1/12	$0^{11}1$	6/13	$01^{10}01$