

重力波干渉計の低周波防振装置 (SAS) に組込まれた 倒立振り子 (IP) の係数励振

石崎秀晴, 我妻一博, Ettore Majorana*, 高橋竜太郎

(2010 年 11 月 11 日受付; 2011 年 1 月 19 日受理)

Parametric Excitation of an Inverted Pendulum Incorporated to the Seismic Attenuation System of the Gravitational Wave Interferometer.

Hideharu ISHIZAKI, Kazuhiro AGATSUMA, Ettore MAJORANA*,
and Ryutaro TAKAHASHI

Abstract

Seismic Attenuation System is used for an anti-vibration mechanism of laser interferometer type gravitational wave detectors. Inverted Pendulum, which is a part of the SAS, play a role of low frequency horizontal vibration isolation for the ground vibration. Since the IP is located at the first stage of a chain of filters, it is exposed to the vertical component of the ground vibration without damp. Therefore, we considered behavior when the IP received longitudinal vibration. We confirmed that the parametric excitation may occur on the IP. The parametric excitation is a vertical-horizontal coupled vibration to occur at the frequency of around two times of the natural frequency. It is thought that the microseisms may trigger the parametric excitation on this occasion.

概要

レーザー干渉計型重力波検出器の防振機構として低周波防振装置 (SAS) が用いられる。SAS の一部である倒立振り子 (IP) は地面振動に対する低周波水平防振の役割を果たす。IP は防振フィルタ連鎖の初段に位置するために、減衰なしに地面振動の垂直成分に晒されている。したがって、われわれは IP が縦振動を受けたときのふるまいを考察した。その結果、係数励振が IP に生じる可能性があることを確認した。係数励振は固有振動数の 2 倍前後の振動数に生じる垂直—水平連成振動である。このとき脈動が係数励振を誘発する可能性があると考えられる。

1. はじめに

国立天文台三鷹キャンパスに設置された重力波干渉計 (TAMA300) の防振機構を、低周波防振装置 (Seismic Attenuation System) という¹⁾。SAS の役割は、重力波検出を担うレーザー干渉計を構成する反射鏡を、地面振動から絶縁することであ

る。SAS の初段にあつて地面振動の水平成分に対する絶縁機能を分担する装置が倒立振り子 (Inverted Pendulum) である。

IP は、長柱の座屈現象 (buckling of the long column) を有効に活用することによって、コンパクトに固有振動数の低周波化 (約 50 mHz) を実現する機構である²⁻⁷⁾。

* Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (Italy)

すでに触れたように、IP は地面振動の水平成分を絶縁する役割を負っているが、SAS の初段にあるために地面振動の鉛直成分も減衰することなく直に作用する。そこで、鉛直方向の振動がインプットされたときの応答はどのようなになるだろうか。IP は基本的に、振動の水平成分が伝わってくる方向に横振動するので、低周波数の鉛直方向の振動に対しては感度を持たないはずと考えられる。

この観点から、IP に鉛直方向の振動が作用したときの応答特性を考察した。その結果、係数励振 (parametric excitation) と呼ばれる固有振動数の2倍付近の振動数における縦・横方向の連成振動が生じる可能性があること、さらに、この付近の周波数帯に脈動 (microseisms) が存在すると係数励振を惹起するという仮説が浮かび上がった。

係数励振は、これまでの TAMA300 での経験や、神岡鉱山の坑道における実験⁸⁾で見出された、出力振動 (IP の横振動) における、共振振動数とは異なる振動数での振幅の増大 (しかし、入力振動の鉛直成分との間に相関がない) という応答特性と矛盾がないことが分かった。

この仮説の実証 (は今後の課題) が果たされれば、上記の特殊な応答を回避する対策は明快であり、IP の設計法と運用方法の確立が期待できる。

2. 係数励振

係数励振を生じる問題の一例として、図1に示すように、支点が鉛直方向に振動する単振り子を採り上げて簡単に復習しておきたい。

ひもの長さが l m, おもりの質量を m kg として、支点 O が

$$x_0 = A_0 \cos \omega t$$

という単振動を行うものとする。ただし、 A_0 m は振幅、 ω s⁻¹ は角振動数で t s は時間である。

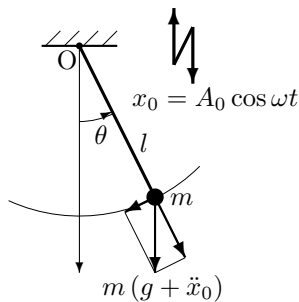


図1 : A simple pendulum
The pivot O is vibrated vertically.

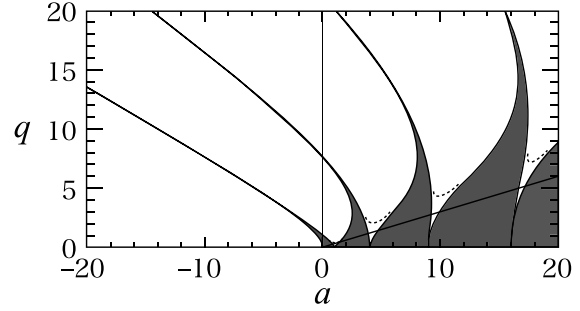


図2 : Stability chart of a pendulum

この振り子の運動を考えると、質量 m に作用する加速度は重力加速度 g m s⁻² のほかに、支点の運動による加速度が加わり

$$g + \ddot{x}_0 = g - \omega^2 A_0 \cos \omega t.$$

ここに、 $(\ddot{}) = d^2/dt^2$ である。よって、振り子の回転角 θ に対する運動方程式は

$$ml\ddot{\theta} + m(g - \omega^2 A_0 \cos \omega t) \sin \theta = 0$$

と表される。

ここで、

$$\omega t = 2\tau$$

と変数変換すると

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{4} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2}$$

であり、ほかに

$$a = \frac{4\omega_0^2}{\omega^2}, \quad 2q = \frac{4A_0}{l}$$

と置く。ただし、 $\omega_0^2 = g/l$ とした。

さらに、 $\sin \theta \approx \theta$ と近似できるものとする

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) \theta = 0 \quad (1)$$

を得る。式(1)をマシュー方程式 (Mathieu's equation) という⁹⁻¹³⁾。

式(1)は、パラメーター a と q の組合せによって振幅が減衰する安定解と増幅する不安定解が生じる。そのうち、安定解と不安定解の境界線 (この線上では、定常周期解が生じる) をプロットした (図2)。これはよく知られた安定判別図 (stability chart) である⁹⁻¹⁵⁾。図では不安定領域を白抜き、安定の部分に灰色に塗りつぶしてある。

a, q を連立方程式として共通因数を消去すると

$$q = \frac{A_0}{2l} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) a.$$

上式は a と q に関する直線の方程式である。これを図2に記入すると ω はこの直線上で変化する。

すると, $a = 1, 4, 9, \dots$ 付近において不安定領域を通過することになる. 振動数で表せば $\omega/\omega_0 = \sqrt{4/a}$ であるから,

$$\frac{\omega}{\omega_0} \div 2, 1, \frac{2}{3}, \dots$$

である.

式 (1) には減衰項が含まれていないが, 粘性減衰が作用する場合は図 2 に点線で示したように, 不安定領域が細くくびれた部分で短絡し, その下部は安定化することが知られている^{11,12,14,15)}. したがって, 一般に多くの場合, 図 2 に示すように不安定領域を通過するのは $a = 1$ 付近だけとなる. よって,

$$\omega \approx 2\omega_0$$

のときに不安定化して振幅が成長する可能性が生じる⁹⁾. なお, ω_0 は x_0 が一定の場合の固有振動数である.

一般に周期的な加振力が振動系に作用すると, 加振力の方向に振動するのが普通であるが, 係数の組合せによっては, 自由度間に連成 (coupling) が生じ, 特定の振動数の領域で, 加振方向に対して垂直方向の振動応答が時間的に発展することがある¹⁵⁾. このような現象を係数励振 (parametric excitation) という⁹⁻¹⁵⁾.

3. 運動方程式

図 3 に示す IP が基礎 (foundation) と共に鉛直方向の周期的変位の作用を受けるときの, 横振動に関する運動方程式を誘導する. IP 構造の詳細は既報⁷⁾ のとおりである.

図 3 のモデルにおいて, 弾性変形する flex joint の先端に剛体とみなされる leg と top table が接続されている. 全体が静止しているときの flex joint 下端に (静止) 座標系の原点 O, 鉛直上向きに x 軸, IP のたわむ方向 (水平) に y 軸を採る.

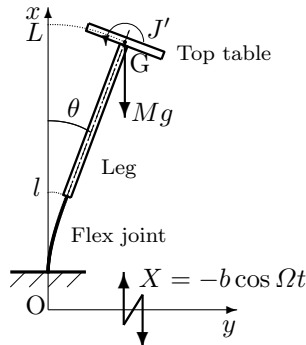


図 3 : IP (vertical vibration) model.

実際は, Leg と top table の共通重心 G に荷重 Mg N と慣性モーメント J' kg m² が作用するのであるが, 簡単化のため, M kg は flex joint の先端に集中質量として作用するものとし, 慣性モーメントは無視する. g m s⁻² は重力加速度である. 基礎と IP の x 軸方向の変位 X m は

$$X = -b \cos \Omega t$$

である. ここに, b m は振幅, Ω s⁻¹ は角振動数で t s は時間である.

Flex joint は長さが l m, 密度は ρ kg m⁻³ で, 断面積 A m², 断面 2 次モーメントを I m⁴, ヤング率を E Pa とする. Flex joint 上の任意点の座標は, 静止しているときの x 座標をもって示し, 変形した際の x 方向の変位 (伸び/縮み) を $u(x, t)$ m とし, y 方向の変位 (たわみ) を $v(x, t)$ m で表す.

Flex joint と先端質量からなる, 系の運動エネルギー $\tilde{T}$ J は

$$\begin{aligned} \tilde{T} = & \int_0^l \int_A \frac{1}{2} \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right\} dA dx \\ & + \left[\frac{1}{2} M \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right\} \right]_{x=l}. \end{aligned}$$

系のポテンシャルエネルギー $\tilde{U}$ J は, flex joint 内部に生じるひずみエネルギー¹⁶⁾ に加えて全体が鉛直方向に変位することを考慮して

$$\begin{aligned} \tilde{U} = & \int_0^l \int_A \frac{1}{2} E \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}^2 dA dx \\ & + \int_0^l \int_A \rho g (x + u + X) dA dx \\ & + [Mg(x + u + X)]_{x=l}. \end{aligned}$$

基礎が鉛直方向に変位することにより, 系に加えられる仕事 $\tilde{W}$ J は¹⁷⁾

$$\tilde{W} = \int_0^l \frac{1}{2} \lambda \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx.$$

ただし, flex joint の中立軸が伸縮しない条件 (inextensibility condition)

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 1$$

が課されており, λ N は力の次元をもつラグランジュの未定乗数 (Lagrangian multiplier) である.

系のラグランジュ関数 (Lagrangian) $\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U} + \tilde{W}$ に対してハミルトンの原理 (Hamilton's principle)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L} dt = 0$$

を適用する．ここに、 δ は変分 (variational) を示し、積分は時刻 $t_0 \leq t \leq t_1$ で実行される．

簡単な計算の結果、

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l \left[\rho A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - EA \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \delta u dx \right. \\
& \quad \left. + \left[M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) \delta u \right]_{x=l} \right. \\
& \quad \left. + \left[EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \delta u \right]_0^l + \lambda \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \right]_0^l \right] dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l \left\{ \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - EA \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} \delta v dx \right. \\
& \quad \left. + \left[\left(EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial v}{\partial x} - EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta v \right]_0^l \right. \\
& \quad \left. + \left[M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v \right]_{x=l} + \left[EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right]_0^l \right] dt = 0. \quad (2)
\end{aligned}$$

式 (2) から x 方向の運動方程式と境界条件が

$$0 \leq x \leq l : \rho A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) - \frac{\partial N_x}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

$$x = 0 : u = 0, \quad (4)$$

$$x = l : M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) + N_x + \lambda \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (5)$$

y 方向の運動方程式と境界条件は

$$0 \leq x \leq l : \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (6)$$

$$x = 0 : v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$x = l : M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + N_x \frac{\partial v}{\partial x} - EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

となる．ただし、

$$N_x = EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

は flex joint に対して x 軸方向に作用する荷重 (軸力) である．

式 (3)～(8) には未定乗数 λ が残されているので、これを解決しなければならない．まず、式 (3),(5) の ρA 、 M でくくられている項において

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \ll \left| \frac{d^2 X}{dt^2} \right|, \quad g$$

を考慮し

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho A \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) = 0, \quad (3)'$$

$$\lambda \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + N_x + M \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) = 0. \quad (5)'$$

式 (3)' を x で一回積分し、 N_x の内容を戻すと

$$\begin{aligned}
& \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \\
& - \rho A \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) x = c_1.
\end{aligned}$$

ここに、 c_1 は積分定数である．

ここで、flex joint は下端 ($x = 0$) で固定されているので、伸びがなく (式 (4))、垂直 (式 (7)) という境界条件と矛盾なく、伸びの変化分 $\partial u / \partial x = 0$ を課することができる．ゆえに、 $c_1 = 0$ である．

この結果をもう一度積分し

$$\begin{aligned}
& \lambda u + EA \left\{ u + \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \\
& - \rho A \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) \frac{x^2}{2} = c_2.
\end{aligned}$$

式 (4) を適用すると $c_2 = 0$ となる．これに加えて、 $x = l$ で $u = u_l$ とおいて

$$\begin{aligned}
& \lambda u_l + EA \left\{ u_l + \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \\
& - \frac{\rho A l^2}{2} \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right) = 0. \quad (3)''
\end{aligned}$$

一方、式 (5)' からは

$$\begin{aligned}
& \lambda = - \frac{N_x + M \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right)}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \\
& \approx -N_x - M \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right). \quad (5)''
\end{aligned}$$

ただし、 $[\partial u / \partial x]_{\max} \approx u_l / l \ll 1$ を考慮した．

式 (3)'', (5)'' より

$$\begin{aligned}
& N_x = EA \left\{ 1 + \frac{1}{u_l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \\
& - \left(\frac{\rho A l^2}{2 u_l} + M \right) \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right).
\end{aligned}$$

垂直応力 σ Pa と、ひずみ ε はフックの法則 (Hooke's law) により

$$\sigma = E\varepsilon$$

と関係づけられる。よって、

$$\frac{N_{x_0}}{A} = E \frac{u_l}{l}, \quad \therefore u_l = \frac{N_{x_0} l}{EA}.$$

ここに、 $N_{x_0} = Mg$ は flex joint に負荷される初期の軸力である。

これを N_x に代入して

$$N_x = EA \left\{ 1 + \frac{EA}{N_{x_0} l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right\} - \left(\frac{\rho A l}{2} \frac{EA}{N_{x_0}} + M \right) \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + g \right). \quad (9)$$

以上、式 (3)~(5) から未定乗数 λ を解いた。また、式 (9) により軸力 N_x が変数 x に依存しない関数で表された。以後、 N_x の表現は式 (9) を用いる。

式 (6)~(8) に式 (5)'、(9) を適用し

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + M \left(g + \frac{d^2 X}{dt^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, \quad (6)'$$

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, \quad (7)'$$

$$M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - M \left(g + \frac{d^2 X}{dt^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0,$$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at} \quad x = l. \quad (8)'$$

さらに、式 (2) の後半部の δv に関する部分も

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l \left\{ \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + M \left(g + \frac{d^2 X}{dt^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right\} \delta v dx \right. \\ & \quad \left. + \left[\left\{ M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - M \left(g + \frac{d^2 X}{dt^2} \right) - EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right\} \delta v \right]_{x=l} \right. \\ & \quad \left. - \left[- \left\{ M \left(g + \frac{d^2 X}{dt^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right\} \delta v \right]_{x=0} \right. \\ & \quad \left. + \left[EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right]_0^l \right] dt = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

4. マシュー方程式

たわみを解くためには、 $v(x, t)$ を変数分離し時間 t の周期関数と座標 x の空間関数が式 (6)'~(8)' を満足するものを見つけ出さなければならない。しかし、そのような関数は簡単には得られない。そこで、修正ガラーキン法 (modified Galerkin method) を適用する^{7, 16, 18)}。

手続の始めとして、式 (10) を無次元化する。そのために以下の無次元変数を導入する。

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{v}{r}, \quad t_* = \omega_0 t, \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_0},$$

$$\beta = \frac{b}{l}, \quad \mu = \frac{M}{\rho A l}, \quad n_x = \frac{N_x}{EI/l^2}, \quad g^* = \frac{\rho A l^3}{EI} g.$$

ただし、 r m は断面 2 次半径 (radius of gyration of area), ω_0 s⁻¹ は有次元の角変数に含まれる定数であり

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

と表される。式 (10) に上記の変数を適用して

$$\begin{aligned} & \int_{t_*0}^{t_*1} \left[\int_{\xi=0}^{\xi=1} \left\{ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t_*^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \mu \left(g^* + \beta \omega^2 \cos \omega t_* \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} \right\} \delta \eta d\xi \right. \\ & \quad \left. + \left[\left\{ \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t_*^2} - \mu \left(g^* + \beta \omega^2 \cos \omega t_* \right) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \right\} \delta \eta \right]_{\xi=1} \right. \\ & \quad \left. + \left[\left\{ \mu \left(g^* + \beta \omega^2 \cos \omega t_* \right) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \right\} \delta \eta \right]_{\xi=0} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \delta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \right] dt_* = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

空間関数が固有振動モードを近似するものとして、それを無限級数で表し、第 j 次の空間関数 $\zeta_j(\xi)$ を適当に仮定し、未知の時間関数 $\sigma_j(t_*)$ との積でたわみ η_j を表す。

$$\eta(\xi, t_*) = \sum_j \zeta_j(\xi) \sigma_j(t_*), \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

変分 $\delta \eta$ は σ_j が未知関数であることを考慮し

$$\delta \eta = \sum_i \zeta_i \delta \sigma_i. \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

式 (12)、(13) を式 (11) に代入し

$$\begin{aligned} & \int_{t_*0}^{t_*1} \sum_i \delta \sigma_i \left[\sum_j \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left\{ \zeta_j \ddot{\sigma}_j \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \mu \left(g^* + \beta \omega^2 \cos \omega t_* \right) \zeta_j'' \sigma_j + \zeta_j^{(4)} \sigma_j \right\} \zeta_i d\xi \right. \\ & \quad \left. + \left[\sum_j \left\{ \mu \zeta_j \ddot{\sigma}_j - \mu \left(g^* + \beta \omega^2 \cos \omega t_* \right) \zeta_j' \sigma_j \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \zeta_j''' \sigma_j \right\} \zeta_i \right]_{\xi=1} \right. \\ & \quad \left. + \left[\sum_j \sigma_j \left\{ \mu \left(g^* + \beta \omega^2 \cos \omega t_* \right) \zeta_j' + \zeta_j''' \right\} \zeta_i \right]_{\xi=0} \right. \\ & \quad \left. + \left[\sum_j \zeta_i' \zeta_j'' \sigma_j \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \right] dt_* = 0. \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}\ddot{\sigma}_j &= \frac{d^2\sigma_j}{dt_*^2}, \quad \zeta'_i = \frac{d\zeta_i}{d\xi}, \quad \zeta'_j = \frac{d\zeta_j}{d\xi}, \\ \zeta''_j &= \frac{d^2\zeta_j}{d\xi^2}, \quad \zeta'''_j = \frac{d^3\zeta_j}{d\xi^3}, \quad \zeta^{(4)}_j = \frac{d^4\zeta_j}{d\xi^4}, \\ i, j &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

である.

上式において $\delta\sigma_i$ は時間領域内で任意の値を採る. したがって, この式が恒等的に成立するためには t_* による積分

$$\int_{t_{*0}}^{t_{*1}} \sum_i \delta\sigma_i \left[\dots \right] dt_* = 0$$

のカッコの内側がゼロに等しくなければならない ($[\dots] = 0$).

さらに, 修正ガラーキン法の手続を経て

$$\sum_j M_{ij} \ddot{\sigma}_j + \sum_j \left\{ K_{ij} - \mu \left(g^* + \beta \omega^2 \cos \omega t_* \right) N_{ij} \right\} \sigma_j = 0. \quad (14)$$

ただし,

$$\begin{aligned}M_{ij} &= \int_0^1 \zeta_i \zeta_j d\xi + \mu \zeta_i(1) \zeta_j(1), \\ K_{ij} &= \int_0^1 \zeta''_i \zeta''_j d\xi, \quad N_{ij} = \int_0^1 \zeta'_i \zeta'_j d\xi.\end{aligned}$$

近似空間関数として, N_x が作用しないときの片持ち梁 (cantilever) の第 j 次の固有振動モード

$$\zeta_j = c_j \left(1 - \cos \frac{2j+1}{2} \pi \xi \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

を仮定する. ここに, c_j は j 次の未定係数である.

式 (15) は式 (7)' の幾何学的境界条件のみを満たしている (式 (14) 導出の手続では, この点が既に織込まれている).

以下, 式 (14), (15) に対して $i, j = 0$ として一項だけを用いて近似計算する. $c_0 = 1$ とすると, 式 (14) の係数が

$$\begin{aligned}m &\equiv M_{00} = \int_0^1 \zeta_0^2 d\xi + \mu \zeta_0^2(1) = \frac{3\pi - 8}{2\pi} + \mu, \\ k &\equiv K_{00} = \int_0^1 \zeta_0''^2 d\xi = \frac{\pi^4}{32}, \\ n &\equiv N_{00} = \int_0^1 \zeta_0^2 d\xi = \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

となる. $\sigma = \sigma_0$ と書くと式 (14) は

$$m\ddot{\sigma} + \left\{ k - \mu \left(g^* + \beta \omega^2 \cos \omega t_* \right) n \right\} \sigma = 0,$$

あるいは

$$\ddot{\sigma} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{\mu g^*}{k/n} \right) \sigma - \frac{\mu \beta \omega^2 n \cos \omega t_*}{m} \sigma = 0. \quad (16)$$

式 (16) の特殊な場合として $\beta = \mu = 0$ のとき (すなわち鉛直方向の振動と先端質量がない場合) $\ddot{\sigma} + (k/m)\sigma = 0$ であり, $\sqrt{k/m}$ は無次元の固有振動数を表している. 有次元の固有振動数を $\Omega_0 \text{ s}^{-1}$ とすると

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\pi^4/16}{3-8/\pi}} \times \omega_0 \doteq \frac{3.664}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

となり, この場合の厳密解 (の数値上の直近)

$$\Omega_0 \doteq \frac{3.516}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

に対し約 4.2% 超過の近似値である^{7,9,10,12,15,16}).

よって,

$$\Omega_0 \equiv \omega_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

と関係付ける.

さらに, 式 (16) において $\beta = 0$, $\mu \neq 0$ の場合

$$\frac{\mu g^*}{k/n} = \left(\frac{M}{\rho A l} \right) \left(\frac{\rho A l^3}{EI} g \right) \left(\frac{1}{\pi^2/4} \right) = \frac{Mg}{\frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}}.$$

最後の辺の分母は

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

であり, $P_{\text{cr}} N$ は片持ち梁の限界荷重 (座屈 (buckling) を生じる軸力) を表し, 解析的な厳密解に一致している^{7,12,16}).

新たな変数

$$\tau = \frac{\omega t_*}{2}, \quad \therefore \frac{d^2\sigma}{dt_*^2} = \frac{\omega^2}{4} \frac{d^2\sigma}{d\tau^2}$$

を定義して, 式 (16) に適用すると

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) \sigma = 0. \quad (17)$$

ここに,

$$\begin{aligned}a &= \frac{4}{\omega^2} \frac{k}{m} \left(1 - \frac{\mu g^*}{k/n} \right) = \left(2 \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^2 \left(1 - \frac{Mg}{P_{\text{cr}}} \right), \\ q &= 2 \frac{k}{m} \left(\frac{\mu \beta}{k/n} \right) = \frac{2\Omega_0^2 M \beta}{\omega_0^2 \rho A l^2 (\pi^2/4)} = \frac{2\beta M \Omega_0^2}{P_{\text{cr}}}.\end{aligned}$$

式 (17) も, マシュー方程式である.

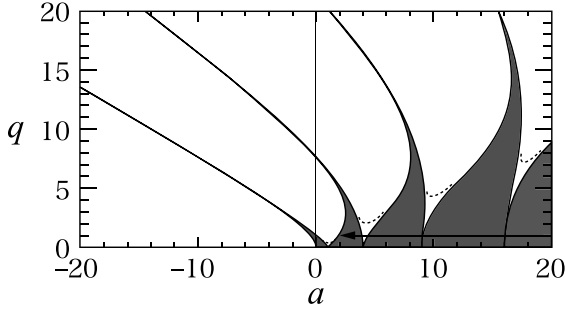


図4：Stability chart of a IP

こんどは、 $Mg/P_{cr} \ll 1$ が仮定できるときに、振幅 b と先端質量 M が一定の場合、振動数 Ω の変化は、図4の安定判別図上では q = 一定の直線上の移動となる（矢印の向きに Ω が上昇）。

ここでも $a = 1$ 付近、すなわち

$$\Omega \approx 2\Omega_0$$

で不安定化する可能性が考えられる¹¹⁾。

5. 神岡の坑道における実験

前節の議論は定性的な解析にとどまっており、現実の IP に適応する際には注意が必要である。

すなわち、flex joint の固有振動数 Ω_0 を厳密解に当てはめて計算（材質はマルエージング鋼であり、 $E = 186 \text{ GPa}$ 、 $\rho = 8.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 、および、形状から、 $l = 47 \times 10^{-3} \text{ m}$ 、 $d = 8.2 \times 10^{-3} \text{ m}$ 、 $A = \pi d^2/4 \text{ m}^2$ 、 $I = \pi d^4/64 \text{ m}^4$ ）すると $\Omega_0 \div 1.573 \times 10^4 \text{ s}^{-1} \div 2.50 \text{ kHz}$ となる。

これを念頭に置き、パラメーター a の表式に対して $Mg/P_{cr} \ll 1$ の条件を課さずに、 $a = 1$ を与えると

$$\Omega = 2\Omega_0 \sqrt{1 - \frac{Mg}{P_{cr}}}$$

と書ける。これは、係数2を除くと、長柱に対して加える軸力が限界荷重に近づくときに固有振動数が低下する現象そのものを表している⁷⁾。つまり、IP に Mg が負荷されたときの固有振動数を $\Omega_1 \text{ s}^{-1}$ とすると

$$\Omega_1 = \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{Mg}{P_{cr}}} \quad (18)$$

となる（既報⁷⁾ 式 (24) を有次元化した表式）。

ところが、実際のところ解析的に限界荷重 P_{cr} を決定することができない上、上記の Ω_0 を用いると $\Omega_1 \approx 50 \text{ mHz}$ を得るためには Mg/P_{cr} の設定に10桁の精度を要する。ゆえに、実験などによって推定された Ω_0 、 P_{cr} を用いる必要がある。推定

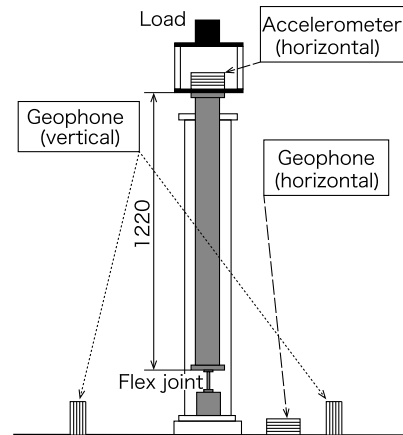
方法としては、軸力 $P = Mg$ と固有振動数 Ω_1 の関係に対する複数の測定点を、曲線 $\Omega_1 \propto \sqrt{-P}$ でフィットすると $P = 0$ 、 $\Omega_1 = 0$ の切片が、それぞれ、 Ω_0 と P_{cr} となる^{6,7,12)}。

したがって、以降では現実的な対応として Ω_0 と P_{cr} は実験によって得られたものを使用するものとする。重力波干渉計 TAMA300 においては、上記の実験が実施されており、これに基づいて荷重 Mg を調整することにより Ω_1 を約 30 ~ 100 mHz の範囲で任意に設定する方法が確立されている¹⁻⁸⁾。

以上を踏まえて、われわれは今、建設が開始された Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope^{19,20)} に組込まれる SAS、および、IP のふるまいをより深く理解するための R&D を継続している。その一環として、LCGT 建設予定地である神岡鉱山の坑道において IP の応答特性を精密に測定した⁸⁾。

神岡における実験の主な目的は、地面振動の水平成分を絶縁する役割を務める IP に対し、SAS の初段に置かれているために地面振動の鉛直成分も直に未減衰のまま作用することの影響を確認することである。

実験に対する事前の想定は、地面振動は水平成分と鉛直成分が無関係に運動するのではなく、一体として強い相関をもって伝わってくることを前提として考えると、基本的には IP は地面が水平方向に揺れる向きに横振動するものであるから、地面振動の水平成分と IP の振動は位相がよく一致し相関値 = 1 となることが期待される。一方、鉛直成分は測定器の設置（向きと符号の関係）に依存して、水平成分の向きに連係して IP に対する位相が 0° と 180° のいずれかが交互に現れ、確率が同じであれば相関値 = 0 となると考えられる。結果として、IP は鉛直成分の振動に対しては有効な感度を持たないものと思われる。


 図5：Experimental set up in Kamioka⁸⁾

この点を精密に検証するために、三鷹に比較して地面振動の振幅がほぼ 1/100 の神岡²¹⁾で実験が実施された。実験のセットアップを図5に示す。

一本足の IP を地面に垂直に設置し、固有振動数 $\Omega_0 \doteq 70$ mHz となるよう荷重が調整された。地面振動の水平成分 (2 点) と鉛直成分 (1 点)、および、IP の横振動 (1 点) が測定された。図中、Geophone との記載が振動計 (速度計)、Accelerometer が加速度計である。測定は、16Hz サンプリング、2048 点のデータを一連平均したものである。

測定結果の一部を図6と図7に示す。横軸は両者ともに振動数 Hz (0.01 ~ 1) を示しており、図6は変位に換算した振動スペクトル $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ ($1 \times 10^{-3} \sim 1 \times 10^{-9}$) のプロット、図7はコヒーレンス関数 (0 ~ 1) のプロットである。

図6、図7のプロットは破線が地面振動の水平成分に対する変位スペクトルとコヒーレンス関数であり、点線が地面振動の鉛直成分に対するものである。また、図6の太実線は IP の横振動の変位スペクトルである。さらに、図7で楕円で示した部分はセンサー感度が良好な領域である。

コヒーレンス関数 (coherence function) Γ^2 は、

$$\Gamma^2 = \frac{|W_{XY}|^2}{W_{YY}W_{XX}}$$

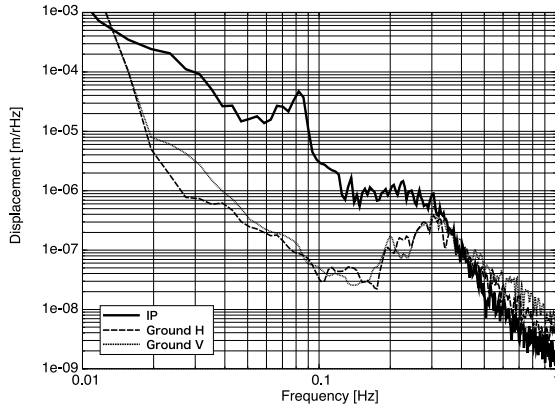


図6 : Displacement spectra of IP, and the ground's vibration H, V⁸⁾

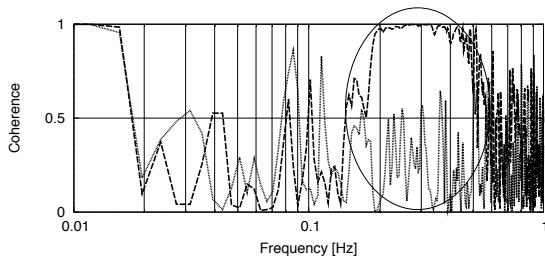


図7 : Coherence function of H, V⁸⁾

The domain surrounded with an oval has good sensor sensitivity.

で計算される。ただし、地面振動変位を入力信号 (下付き添字 X)、IP の横振動変位を出力信号 (下付き添字 Y) とするときのクロススペクトル (cross spectrum) が W_{XY} であり、 W_{XX} , W_{YY} は入力信号それぞれのパワースペクトル (power spectrum) である。

コヒーレンス関数は、出力信号のうちの入力信号に基づく成分のパワーの比率を表し、これは、入力信号と線形の関係にある出力信号の成分、すなわち入力信号との間に位相的な干渉性をもつ成分の比率を表している²²⁾。

実験の結果、想定したとおりに地面振動の水平成分に対してはよく相関があり、鉛直成分とはほとんど相関がないことが分かった (図7)。

地面振動の振幅は平均的には Ω^{-2} に比例するスペクトルであり²¹⁾、IP の変位も固有振動数を除けば基本的には地面振動のスペクトルに対して、ほぼ平行に沿ったものとなるはずである。ところが、固有振動数とは全く異なる周波数帯 (0.2 ± 0.1 Hz 付近) に地面振動に沿わない振幅の増幅が見られた (図6)。

前に述べたように、IP は地面振動の鉛直成分に対する相関がほとんどなく、位相が揃わないために振幅のゲイン (gain) も長時間の測定では打ち消されるものと考えられる。しかし、IP の横振動に鉛直方向からの入力に対する応答としての成分があることも事実であり、位相や振動数の特別な組合せにおいて、そのゲインがゼロでない値を持つ可能性を検討する必要があることを、この実験が示唆していると考えられる。

なお、図6で地面振動が 0.3 Hz 付近をピークとする盛り上がりが見られる。これは、脈動 (microseisms) と呼ばれる地面振動の特徴的な成分²³⁾であり、これが IP の異常な応答に関与していることは想像に難くない。

6. 現象モデリング

式 (16) に対して、

$$\omega_n = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{\mu g^*}{k/n}} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{Mg}{P_{cr}}},$$

$$q' = \frac{\mu \beta \omega_n^2 n}{\omega_n^2 m} = \left(\frac{Mg/P_{cr}}{1 - Mg/P_{cr}} \right) \frac{\Omega^2 b}{g}$$

というパラメーターを採用すると

$$\frac{d^2 \sigma}{dt_*^2} + \omega_n^2 (1 - q' \cos \omega t_*) \sigma = 0 \quad (19)$$

を得る. 式 (19) もマシュー方程式の標準形の一つである^{14,15)}.

なお, ω_n で $n=1$ としたものは $\omega_1 = \Omega_1/\omega_0$ であるから, 式 (18) と見較べると IP の一次の固有振動数の無次元化表式であることが分かる.

入力振動数に同期する解として

$$\sigma = C_1 \cos \omega t_* + S_1 \sin \omega t_*$$

を仮定して式 (19) に代入すると $\cos \omega t_*$ と $\sin \omega t_*$ に比例する項の他に $\cos 2\omega t_*$, $\sin 2\omega t_*$ に関する項も出現してくる. このうち, ωt_* に依存した項から固有振動数 ω_n が得られる. 一方, $2\omega t_*$ に対応する項には係数の計算式に q' が含まれる. これにより, 不安定解の振動数範囲が少し拡がり

$$\omega = 2\omega_n \sqrt{1 \pm \frac{1}{2}q'}$$

となって¹⁵⁾, 式 (17) からの $\Omega \approx 2\Omega_0$ と同様の結果を得る. 式 (19) も式 (17) と本質は同じなのでこれは当然のことであるが, このままでは図 6 の結果である約 0.2 Hz 付近の拡がったピークを説明するには不十分である.

そこで, 式 (19) に対して粘性減衰力と非線型的な弾性復元力を加えた拡張を行う¹⁵⁾.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dt_*^2} + 2\gamma\omega_n \frac{d\sigma}{dt_*} \\ + \omega_n^2 (1 - q' \cos \omega t_*) \sigma + \varepsilon \omega_n^2 \sigma^3 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

ここに, 第 2 項は粘性減衰項であり γ は減衰比 (damping ratio), 第 4 項が非線型復元力項である. Flex joint の弾性復元力 F N を (集中定数系のバネのように考え) $F = kx \pm k'x^3$ で近似する (図 8) と (x m はバネの伸び・縮み, k N m⁻¹ は線型バネ定数で, k' N m⁻³ は非線型バネ係数) バネが支持する質量を m kg として

$$\frac{F}{m} = \frac{k}{m}x \pm \frac{k'}{m}x^3 = \omega_n^2 x \pm \omega_n^2 \varepsilon x^3$$

と書ける. ただし, $\omega_n^2 = k/m$, $\varepsilon = k'/k$ である.

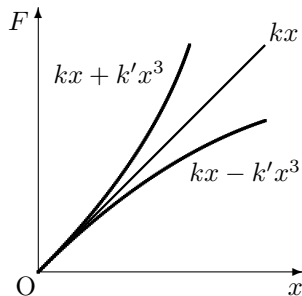


図 8 : Model of restoring forece.

IP は, たわむと固有振動数 (したがって, 剛性) が上昇する (既報⁷⁾ 図 10) ことを考慮して複号は正号を選んだ. このような非線型バネ特性を漸硬バネ (hardening spring) と呼び, 負号の場合は漸軟バネ (softening spring) という. 既報⁷⁾ (式 (17)) に示された IP の運動方程式には漸硬バネ復元力項が既に含まれており, 式 (19) から式 (20) への拡張に対する相応の根拠となる.

これまで見てきたように, 固有振動数 ω_n の 2 倍付近における ω のふるまいにフォーカスし

$$\sigma = C_{1/2} \cos \frac{1}{2}\omega t_* + S_{1/2} \sin \frac{1}{2}\omega t_*$$

を式 (20) の解と仮定して代入すると

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \omega_n^2 \left(1 - \frac{1}{2}q' \right) - \frac{1}{4}\omega^2 \right\} C_{1/2} + \gamma\omega_n\omega S_{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_n^2 \left(C_{1/2}^3 + C_{1/2}S_{1/2}^2 \right) \right] \cos \frac{1}{2}\omega t_* \\ & + \left[\left\{ \omega_n^2 \left(1 + \frac{1}{2}q' \right) - \frac{1}{4}\omega^2 \right\} S_{1/2} - \gamma\omega_n\omega C_{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_n^2 \left(S_{1/2}^3 + C_{1/2}^2S_{1/2} \right) \right] \sin \frac{1}{2}\omega t_* \\ & + \left(\frac{1}{4}\varepsilon\omega_n^2 C_{1/2}^3 - \frac{3}{4}\varepsilon\omega_n^2 C_{1/2}S_{1/2}^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}\omega_n^2 q' C_{1/2} \right) \cos \frac{3}{2}\omega t_* \\ & + \left(\frac{3}{4}\varepsilon\omega_n^2 C_{1/2}^2S_{1/2} - \frac{1}{4}\varepsilon\omega_n^2 S_{1/2}^3 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}\omega_n^2 q' S_{1/2} \right) \sin \frac{3}{2}\omega t_* = 0. \end{aligned}$$

上式において, 仮定した振動数 $\omega/2$ に関する項をとり出す. この際, 上式の右辺が $= 0$ であるから左辺の各項も $= 0$ であるとする. このような考え方に基づく方法を一般に, 調和バランス法 (harmonic balance method) という¹⁵⁾. よって,

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{1}{2}q' - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right\} C_{1/2} + \gamma\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) S_{1/2} \\ & \quad + \frac{3}{4}\varepsilon \left(C_{1/2}^3 + C_{1/2}S_{1/2}^2 \right) = 0, \\ & \left\{ 1 + \frac{1}{2}q' - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right\} S_{1/2} - \gamma\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) C_{1/2} \\ & \quad + \frac{3}{4}\varepsilon \left(S_{1/2}^3 + C_{1/2}^2S_{1/2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

式 (21) は $C_{1/2}$, $S_{1/2}$ に関する連立方程式である. これを解き, その上で振幅 σ の実効値

$$\sigma_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 dt_*} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(C_{1/2}^2 + S_{1/2}^2 \right)}$$

を計算する. ここに, T は係数励振応答の基本周期 ($T = 4\pi/\omega$) である.

σ_{rms} を計算したところ

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[2\varepsilon q' \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 4 \right) - \varepsilon q' \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 4 \right)^2 - 2 \left\{ \varepsilon^2 q'^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 2q' - 4 \right)^2 \left(q'^2 - 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \right\}^{1/2} \right]^{1/2} \times \left\{ \varepsilon^2 q' \left(4 + 2q' - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \right\}^{-1/2}, \quad (22)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[2\varepsilon q' \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 4 \right) - \varepsilon q' \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 4 \right)^2 + 2 \left\{ \varepsilon^2 q'^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 2q' - 4 \right)^2 \left(q'^2 - 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \right\}^{1/2} \right]^{1/2} \times \left\{ \varepsilon^2 q' \left(4 + 2q' - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \right\}^{-1/2}$$

という二つの独立した解を得た²⁴⁾。それぞれを σ_1 , σ_2 とおいた。

式 (22) のプロットを図9に示す。図の横軸が振動数 ω Hz, 縦軸が振幅 σ である (式 (21) は, ω/ω_n を独立変数としたので ω を有次元として扱っても影響がなく, σ は本来どおり無次元である)。

パラメーターとして, 固有振動数 $\omega_n = 70$ mHz, 減衰比 $\gamma = 0.088$, 非線型パラメーター $\varepsilon = 100.0$ を与えた。

さらに, 係数励振の応答を特徴づけるパラメーターである q' に対して $q' = 0.77 + 0.1 \times (\omega/\omega_n)^2$ としている。これは, 本節の冒頭に示した, q' が地面振動の振幅 β に比例していることに着目し, 振幅 $\beta = \beta_0$, $\omega = 2\omega_n$ の近傍において

$$q' \approx \mu \frac{n}{m} \left\{ \frac{(2\omega_n)^2}{\omega_n^2} + \frac{(\omega - 2\omega_n)^2}{\omega_n^2} \right\} (\beta_0 + \Delta\beta) \approx \mu \frac{n}{m} \left\{ \frac{(2\omega_n)^2}{\omega_n^2} \beta_0 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \Delta\beta \right\}$$

と近似した。また β を β_0 と $\Delta\beta$ に分解し, それぞれを定数とした。

これらのパラメーターの数値は所与の ω_n 以外は図9の関数形状を得るために試行錯誤的に決定したものである。また, 式 (22) の σ_1 , σ_2 は全く独立しているものではなく, 図9は σ_1 と σ_2 を接続した (うえて重なった部分が消去された, 両者の排他的論理和に相当する) プロットである。

図9は固有振動数の2倍, $2\omega_n = 140$ mHz 付近から約 0.3 Hz までにいたる有限振幅の出現を示しており, 神岡の実験で得られた結果 (0.2 Hz 前後における振幅の増幅) を表す図6と符合する。

さらに, 式 (20) の $q' \cos \omega t_*$ を含む項は地面の鉛直方向の振動を表しており, これが IP に対する

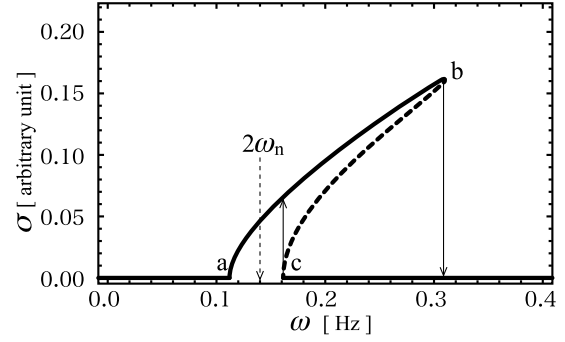


図9 : Frequency Response (Gain Diagram) of IP by Parametric Excitation.

加振 (入力信号) と考えれば, 式 (20) は強制振動の方程式と見なすことができる。そして, 式 (21) は入力信号の振動数 ω に対してその2倍である 2ω で共振する成分の振幅の計算であり, その結果が図中の $\omega = 2\omega_n$ 付近から伸びる振幅の増加を示す曲線 (a → b → c) である。

したがって, 図9は共振曲線と見なすことができるが, 振動数 ω の振動と 2ω の振動には線型的な関係 (両者の振動における位相的な干渉性) が認められないから, 通常の周波数応答実験ではコヒーレンス関数 $\Gamma^2 \approx 0$ となると予想される。ゆえに, この点も神岡実験の図7が示す結果と矛盾がない。

式 (20) は, 非線型方程式であるから位相的な干渉性のない解が得られても当然のようにも思えるが, 線型の方程式である式 (19) でも同じ結果である。すなわち, $\sigma = C_1 \cos \omega t_* + S_1 \sin \omega t_*$ を代入すると式 (19) の係数に含まれる $\cos \omega t_*$ との積が ω と 2ω の三角関数の和に変換されることによる。すなわち, この点が係数励振の本質であって, 非線型的な応答を出力するためにノイズのように見えて相関がなくなる。ところが, $\omega \approx 2\omega_n$ 付近に限って, ゼロでないゲインが得られるのである。

なお, 式 (20) の非線型項の効果は図9では, 共振曲線のピークが高い周波数方向へ傾斜しているというグラフ形状として表れている。これは, 漸硬バネの典型的な特性である。このため IP を加振機などに設置して, 鉛直方向に低い周波数から高い方へスweepしながら加振したとすれば, a 点から共振状態を示し, b 点に至った時点で急に非共振状態となる (跳躍現象: jump phenomenon)。逆に高い周波数から低い方へスweepすると c 点で跳躍して共振状態となる。このように, スweepする方向によって応答の経路が異なることを履歴現象 (hysteresis phenomenon) という^{10,12,15,16)}。

図9の結果を図4と関連付けて評価すると, $\Omega \approx 2\Omega_1$ (5節の最初の式に式 (18) を代入) において,

粘性減衰の効果で q が (ゼロに近いが) ゼロでない安定境界が生じ、この境界線上における定常的な振幅の変化を表すのが図9であると解釈できる。

図9のaとc点は図4の q = 一定の直線が $a \div 1$ の両側で安定・不安定境界線と交わる点であり、 $a \leq \omega \leq c$ では $\sigma = 0$ の解が不安定である。また、c から b までの点線では有限振幅の周期解が不安定となる。 ω が a 点以下のときと、c 点以上の場合は安定である¹⁵⁾。

このとき地面振動の振幅 β の値が、ある大きさであるときに、この境界線上に乗り、それを下回れば安定領域にとどまるものと考えられる。

そうすると、この振動数領域に脈動が存在し、これが β を増大させて係数励振を励起したという可能性が浮上する。これを仮説として提唱することが本報告の目的のひとつである。

7. エネルギー収支

係数励振が発生したときの影響を考える。そのために、式(19)の近似解を一般的に求める。

式(19)において $x = \sigma$, $t = t_*$ と書き

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n^2(1 - q' \cos \omega t)x = 0. \quad (19)'$$

$q' = 0$ とすると

$$\begin{aligned} x &= c \cos \psi, & \frac{dx}{dt} &= -c\omega_n \sin \psi, \\ \psi &= \omega_n t + \phi. \end{aligned} \quad (23)$$

ここに、 c , ϕ は振幅と位相角に関する未定定数である。式(19)' に対し $q' \ll 1$ と仮定し

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2(1 - q' \cos \omega t)x$$

を解く。ただし、 $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$ である。

定数 c , ϕ を変数 t の関数として式(23)を上式に代入し

$$\begin{aligned} \dot{c} \cos \psi - c\dot{\phi} \sin \psi &= 0, \\ \dot{c} \sin \psi + c\dot{\phi} \cos \psi &= -\omega_n q' c \cos \omega t \cos \psi. \end{aligned}$$

これから、

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -\frac{\omega_n q' c}{2} \cos \omega t \sin 2\psi, \\ \dot{\phi} &= -\frac{\omega_n q'}{2} \cos \omega t (1 + \cos 2\psi). \end{aligned}$$

いま、 $\omega_n \approx \omega/2$ を仮定し

$$x = c \cos \psi = c \cos \left(\frac{\omega}{2} t + \vartheta \right) \quad (24)$$

という解を求める。

すると $\psi \equiv \omega_n t + \phi = (\omega/2)t + \vartheta$ から

$$\phi = \vartheta - \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right) t.$$

$\dot{c}$, $\dot{\phi}$ は ψ の周期 $T = 2\pi$ の周期関数であり、一周期の間に大きく変化しないとして平均法 (averaging method) を用いる。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{\dot{c}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{c} d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{c} \frac{\omega}{2} dt \\ &= -\frac{cq'\omega_n^2}{2\omega} \sin 2\vartheta, \\ \bar{\dot{\phi}} &= \bar{\dot{\vartheta}} - \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\phi} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\phi} \frac{\omega}{2} dt = -\frac{q'\omega_n^2}{2\omega} \cos 2\vartheta, \\ \therefore \bar{\dot{\vartheta}} &= \omega_n - \frac{\omega}{2} - \frac{q'\omega_n^2}{2\omega} \cos 2\vartheta. \end{aligned}$$

ここで、 $\dot{c}$, $\dot{\vartheta}$ の平均値 ($-$ は省略) の連立方程式を解くために

$$U = c \cos \vartheta, \quad V = c \sin \vartheta$$

を導入する。微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \left\{ -\frac{q'\omega_n^2}{2\omega} - \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right) \right\} V, \\ \frac{dV}{dt} &= \left\{ -\frac{q'\omega_n^2}{2\omega} + \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right) \right\} U. \end{aligned}$$

dU/dt , dV/dt の連立微分方程式の解は特性方程式

$$\begin{vmatrix} \nu & \frac{q'\omega_n^2}{2\omega} + \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right) \\ \frac{q'\omega_n^2}{2\omega} - \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right) & \nu \end{vmatrix} = 0$$

により

$$\nu^2 - \left(\frac{q'\omega_n^2}{2\omega} \right)^2 + \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right)^2 = 0$$

の2根を

$$\nu = \pm \sqrt{\left(\frac{q'\omega_n^2}{2\omega} \right)^2 - \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right)^2} \quad (25)$$

と記す。そうすると、上記の連立方程式の一般解が

$$\begin{aligned} U &= C_1 e^{+\nu t} + C_2 e^{-\nu t}, \\ V &= C_1 \frac{-\frac{q'\omega_n^2}{2\omega} + \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right)}{\nu} e^{+\nu t} \\ &\quad + C_2 \frac{\frac{q'\omega_n^2}{2\omega} - \left(\omega_n - \frac{\omega}{2} \right)}{\nu} e^{-\nu t}. \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、 C_1 、 C_2 は積分定数であって初期条件により定められる。

よって、方程式 (19)' の解 (24) は式 (25), (26) を用いて

$$c^2 = U^2 + V^2, \quad \vartheta = \tan^{-1} \frac{V}{U} \quad (27)$$

となる¹⁴⁾。

式 (25)～(27) から ν が虚数のときには振幅 c は時間とともに減衰する。しかし、 ν が実数の場合には c は時間の経過とともに指数関数的に発展する。すなわち、IP が不安定化することになる。

つぎに、この振動のエネルギー収支を計算する。再び、式 (19)' から

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_n^2 x = q' \omega_n^2 x \cos \omega t$$

の両辺に dx/dt を掛けると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (\omega_n x)^2 \right\} \\ = q' \omega_n^2 x \frac{dx}{dt} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (28)$$

式 (28) は力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）の時間変化を表す。

式 (24)～(27) により、 x は時間 t とともに

$$x = C_* e^{\nu t} \cos(\omega_n t + \phi_*)$$

に漸近する。ここに、 C_* 、 ϕ_* は定数である。

十分に時間が経った後に、 x 、 dx/dt に含まれる指数関数の成分が一周期 T の間 ($t_0 \leq t \leq t_0 + T$) に極端に大きく変化しないものとして $e^{\nu t_0} \approx e^{\nu(t_0+T)} \approx \text{const.}$ と近似し

$$\begin{aligned} x &\approx C_* e^{\nu t_0} \cos(\omega_n t + \phi_*), \\ \frac{dx}{dt} &\approx -C_* \omega_n e^{\nu t_0} (\omega_n t + \phi_*). \end{aligned}$$

式 (28) を一周期 ($T = 2\pi$) に亘って積分した結果を ΔE とすると

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_{t_0}^{t_0+T} q' \omega_n^2 (\cos \omega_n t) x \frac{dx}{dt} dt \\ &= q' \omega_n^2 C_*^2 e^{2\nu t_0} \left\{ -\omega_n \int_{t_0}^{t_0+T} \cos \omega t \right. \\ &\quad \left. \times \cos(\omega_n t + \phi_*) \sin(\omega_n t + \phi_*) dt \right\} \\ &= q' \omega_n^2 C_*^2 e^{2\nu t_0} \left\{ -\frac{\omega_n}{\omega} \int_{\omega t_0}^{\omega t_0+2\pi} \cos(\omega t) \right. \\ &\quad \left. \times \cos\left(\frac{\omega_n}{\omega} \omega t + \phi_*\right) \sin\left(\frac{\omega_n}{\omega} \omega t + \phi_*\right) \omega dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q' \omega_n^3 C_*^2 e^{2\nu t_0}}{4} \left[\frac{1}{\omega + 2\omega_n} \cos \left\{ \left(2\frac{\omega_n}{\omega} + 1 \right) \omega t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\phi_* \right\} - \frac{1}{\omega - 2\omega_n} \cos \left\{ \left(2\frac{\omega_n}{\omega} - 1 \right) \omega t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\phi_* \right\} \right]_{\omega t_0}^{\omega(t_0+T)} \\ &= \frac{q' \omega_n^3 C_*^2 e^{2\nu t_0}}{4} \left[\frac{\cos((\omega + 2\omega_n)t + 2\phi_*)}{\omega + 2\omega_n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos((\omega - 2\omega_n)t + 2\phi_*)}{\omega - 2\omega_n} \right]_{t_0}^{t_0+T} \end{aligned}$$

となる¹⁴⁾。

この結果から、 $\omega \rightarrow 2\omega_n$ ($\omega < 2\omega_n$ において ω が $2\omega_n$ に近づく) とし $\Delta E > 0$ となると考えられる。ところが実際、上式において $t_0 = 0$ として計算を進めると $\omega = 2\omega_n$ において $\Delta E = 0$ となる。これは、 $e^{\nu t_0} \approx e^{\nu(t_0+T)}$ としたところに錯誤があり、正確に振幅の増加を考慮すれば、確かに $\Delta E > 0$ である（煩雑となるので詳細は割愛）。

本節の目的は、係数励振が発生した場合は IP システムの力学的エネルギーが増加するというを示すことである。したがって、重力波検出を精密に実施するためには、係数励振の発生を回避する方策を確立すること、あるいは、発生した場合にはダンピングしてシステム全体に余分なエネルギーを伝達しない努力が必要である。

8. まとめ

重力波干渉計の防振機構が、低周波防振装置 (Seismic Attenuation System) である。SAS の初段にあつて、地面振動の水平成分を絶縁する役割を担う装置を、倒立振り子 (Inverted Pendulum) という。IP は、長柱の座屈 (buckling) を有効に利用してコンパクトに低い固有振動数 (50 mHz) を実現している。

SAS の初段にある IP には、地面振動の鉛直成分も減衰することなく作用する。そこで、鉛直方向の振動が加えられたときの、IP のふるまいを考察した。

本来、IP は振動の水平成分に対して応答し、鉛直成分に対しては感度を持たないと想定できる。LCGT 建設予定地である、神岡鉱山の坑道で実施された実験により、IP の振動は地面振動の水平成分に対して相関係数が高く、鉛直成分には殆ど相関しないことが分かり、上記の想定が確認された。

ところが、固有振動数とは異なる周波数帯において、共振現象のような振幅の増幅が認められた。

考察の結果, IP は鉛直方向からの加振によって係数励振 (parametric excitation) と呼ばれる, 固有振動数の 2 倍付近の振動数における共振が生じる可能性があることが明らかにされた. 係数励振は入力される振動の振幅にも依存している.

したがって, この振動数領域に脈動 (micro-seisms) が存在すると, これにより IP に係数励振が励起されるという仮説が浮上した. また, 係数励振は入力信号の 2 倍の振動数との間に生じる共振現象であるから入力信号とは相関せず, 神岡での実験に矛盾しない.

係数励振が生じると, システムの力学的エネルギーが増加することが定性的に示せる. ゆえに, 係数励振を回避するか, 回避できない場合は適切に減衰しエネルギー増加の抑制が必要である.

今後, 本考察の実験による検証が求められる. 方法としては, 固有振動数の 2 倍付近に脈動が存在しないように, IP の固有振動数を設定して係数励振の発生が回避されることを確認すること. および, 許容される固有振動数の上限を明らかにすることである.

これが果たされれば, IP は鉛直方向の振動から影響を受けないことが実証される.

謝辞

藤本真克 重力波プロジェクト推進室長, ならびに, 川村静児 准教授には有意義なご議論を頂き, 報告者らを導かれた. ここに, 記して謝意を表す.

参考文献

- 1) R. Takahashi, K. Arai, D. Tatsumi, M. Fukushima, T. Yamazaki, M.-K. Fujimoto, K. Agatsuma, Y. Arase, N. Nakagawa, A. Takamori, K. Tsubono, R. DeSalvo, A. Bertolini, S. Márka, and V. Sannibale: Operational status of TAMA300 with the seismic attenuation system (SAS), *Classical and Quantum Gravity*, **25**, 114036-114043 (2008).
- 2) A. Takamori: *Low Frequency Seismic Isolation for Gravitational Wave Detectors*, PhD thesis, Department of Physics School of Science University of Tokyo (2002).
- 3) S. Márka, A. Takamori, M. Ando, A. Bertolini, G. Cella, R. DeSalvo, M. Fukushima, Y. Iida, F. Jacquier, S. Kawamura, Y. Nishi, K. Numata, V. Sannibale, K. Somiya, R. Takahashi, H. Tariq, K. Tsubono, J. Ugas, N. Viboud, C. Wang, H. Yamamoto, and T. Yoda: Anatomy of the TAMA SAS seismic attenuation system, *Classical and Quantum Gravity*, **19**, 1605-1614 (2002).
- 4) G. Losurdo, D. Passuello, P. Ruggi: The control of the Virgo Susperattenuator revised (I). Inertial Damping: present and future, *VIR-NOT-FIR-1390-318*, 1 (2006).
- 5) A. Takamori, P. Raffai, S. Márka, R. DeSalvo, V. Sannibale, H. Tariq, A. Bertolini, G. Cella, N. Viboud, K. Numata, R. Takahashi, and M. Fukushima: Inverted pendulum as low-frequency pre-isolation for advanced gravitational wave detectors, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, **A 582**, 683-692 (2007).
- 6) 我妻一博: 重力波検出器 TAMA300 における低周波防振装置 SAS の性能評価および制御方法についての研究, 東京大学理学系研究科物理学専攻修士論文 (2007).
- 7) 石崎秀晴, 我妻一博, 辰巳大輔, 新井宏二, 和泉 究, 高橋竜太郎: TAMA300 の低周波防振装置 (SAS) に組込まれた倒立振り子 (IP) の力学特性, 国立天文台報, 第 **13** 巻, 1-13 (2010).
- 8) R. Takahashi, A. Takamori, E. Majorana: *Behavior of an inverted pendulum in the Kamioka mine*, LCGT f2f meeting, June (2010).
- 9) 亘理 厚: 機械力学, 改訂版, 共立出版, pp.103-110, pp.200-211 (1969).
- 10) 日本機械学会: 機械工学便覧 基礎編 $\alpha 2$ 機械力学, 丸善, pp.75-76, pp.101-102 (2004).
- 11) S. P. Timoshenko and J. M. Gere: *Theory of Elastic Stability. Second edition*, McGraw-Hill Book Co., pp.158-162 (1961).
- 12) 小林繁夫: 振動学, 丸善, p.79, pp.165-173 (1994).
- 13) 佐藤 力: 非線形振動論, 朝倉書店, pp.115-130 (1970).

- 14) N. N. Bogolyubov, YU. A. Mitropolskiĭ, 益子正教 訳：非線型振動論 —漸近的方法— 増補版, 共立出版, p.27, pp.229-243 (1965).
- 15) 日本機械学会：JSME テキストシリーズ 振動学, 丸善, pp.63-67, pp.136-141 (2005).
- 16) 永井健一：ダイナミクスのシステム解析, 森北出版, pp.102-137 (2000).
- 17) H. Yabuno, Y. Ide, and N. Aoshima: Non-linear Analysis of a Parametrically Excited Cantilever Beam, (Effect of the Tip Mass on Stationary Response), *JSME International Journal Series C*, Vol. **41**, pp.555-562 (1998).
- 18) 永井健一, 丸山真一, 武藤康太, 山口誉士夫：先端を弦張力で拘束された片持ちはりの非線形振動解析, 日本機械学会論文集 (C編) **74** 巻, 1080-1086 (2008).
- 19) K. Kuroda: Status of LCGT, *Classical and Quantum Gravity*, **27**, 084004 (2010).
- 20) LCGT Collaboration：大型低温重力波望遠鏡 (LCGT) 計画 —設計文書 (第3版)— (2009).
- 21) K. Yamamoto, S. Kamagasako, T. Uchiyama, S. Miyoki, M. Ohashi, K. Kuroda, T. Tomaru, R. Takahashi, D. Tatsumi, S. Telada, A. Araya, and A. Takamori : *Measurement of seismic motion at Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope project site*, JGW Document **JGW-T1000218** (2010).
- 22) 城戸健一：デジタル信号処理入門, 丸善, pp.47-49 (1985).
- 23) 大森房吉：第四編 地ノ脈動 (地震験測法一班), 震災豫防調査會報告, **50**, pp.38-46 (1905).
- 24) **WOLFRAMRESEARCH**: *Mathematica* 7 (2009).