

日出入時刻計算における標高の効果について

相 馬 充

(2001年4月2日受理)

On the Effects of Dip and Refraction in Calculating the Times of Sunrise and Sunset

Mitsuru SÔMA

Abstract

Incorrect formulae for the effects of dip and refraction have been used for the times of sunrise and sunset in the Chronological Scientific Tables (Rika nenpyo) edited by the National Astronomical Observatory and in the Japanese Ephemeris published by Japan Coast Guard. This paper clarifies this fact and gives the correct formulae for the effects.

1. はじめに

良く知られているように、天体の出は山麓より山頂の方が早く、天体の入りは山頂の方が遅い。これは標高が高くなるほど見かけの水平線が鉛直線に垂直な方向より下がって見えるため、この下がって見える角度を眼高差 (dip of the horizon) という。国立天文台編による理科年表暦部の pp. 暦 9~暦 46 に掲載されている日出入・月出入の時刻は標高 0 m におけるものとして、この効果は算入されていないが、p. 暦 62 以降の日月食のページ (内惑星の日面経過が起こる場合はそれも含む) では、それらの現象が日本の主要 5 地点において日出入または月出入の時刻にまたがって起こる場合は、それらの地点の標高を考慮し、日出入または月出入の時刻における食の状況を掲載している。一方、海上保安庁水路部編集による天体位置表では、眼高 4.6 m における眼高差を 3'.8 とし、これを算入して日没時刻が掲載されている。しかし、両者ともに標高による効果の計算が間違っているのである。この論文はこの点を明らかにし、この効果の正しい計算式を示すことを目的としている。

なお、理科年表では「出入」、天体位置表では「出没」という言葉が使用されているが、両者に意味の違いはないので、この論文では以後「出入」に統一する。

2. 幾何学的眼高差

標高 h m の日出入時刻に対する効果 Δt は理科年表 1986 年版¹⁾, 1989 年版²⁾, 1996 年版³⁾に次のように与え

られている。

$$\Delta t = 0^m.118 \sqrt{h} \sec(\phi + \delta) \sec(\phi - \delta). \quad (1)$$

ただし、 ϕ は出入時を求めたい地点の緯度、 δ は太陽の赤緯である。

この節では大気による光の屈折を無視した場合の Δt の公式を導き、それと比較して上式が間違いであることを示す。

地球の形は半径 6,370 km の球とする。標高 h m での水平線の伏角 I は図 1 から

$$\cos I = \frac{6.37 \times 10^6}{6.37 \times 10^6 + h} = \left(1 + \frac{h}{6.37 \times 10^6}\right)^{-1}. \quad (2)$$

太陽は日周運動で赤緯 δ の等赤緯線に沿って移動して見える。赤緯 δ の等赤緯線が水平線に垂直な方向に対してなす角を J とすると、天の北極・天頂・水平線上の出入点の 3 点を頂点とする球面三角 (図 2) に球面三角の公式を適用して

$$\sin J = \frac{\sin \phi}{\cos \delta}. \quad (3)$$

標高 h m による日出入時刻への補正值 Δt は

$$\Delta t = \frac{I}{\cos J \cos \delta}. \quad (4)$$

ただし、 $1^\circ = 4^m$ の関係により角度を時間に換算するものとする。式 (3) より

$$\begin{aligned} \cos^2 J \cos^2 \delta &= \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \delta}\right) \cos^2 \delta \\ &= \cos^2 \delta - \sin^2 \phi \\ &= \cos(\phi + \delta) \cos(\phi - \delta). \end{aligned} \quad (5)$$

また式 (2) より

$$\begin{aligned}
 I &\simeq \sqrt{\tan^2 I} = \sqrt{\sec^2 I - 1} \\
 &= \sqrt{\left(1 + \frac{h}{6.37 \times 10^6}\right)^2 - 1} \\
 &\simeq \sqrt{\frac{2h}{6.37 \times 10^6}} \\
 &= 1.926\sqrt{h}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

式 (5), (6) を式 (4) に代入すると

$$\begin{aligned}
 \Delta t &\simeq 1.926\sqrt{h} \sec(\phi + \delta) \sec(\phi - \delta) \\
 &= 0^m 128\sqrt{h} \sec(\phi + \delta) \sec(\phi - \delta).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

実際の太陽光は図 3 のように大気中で屈折するはずである。光線の地球表面への接点までの屈折量は地平大気差 (理科年表では $35' 8''$ を採用) として考慮されている。その他に接点から標高 h m の観測者に到達するまでも光は屈折する。この屈折の量は大気密度や温度分布によって変化するが、通常は図 3 に示した方向に屈折するはずであり、かなり特殊な大気分布を考えないかぎり、大気屈折を考慮した場合の Δt の値が式 (7) に示したもののより小さくなることはない。しかし、理科年表に与えてある式 (1) は式 (7) より小さくなっており、明らかに誤りである。

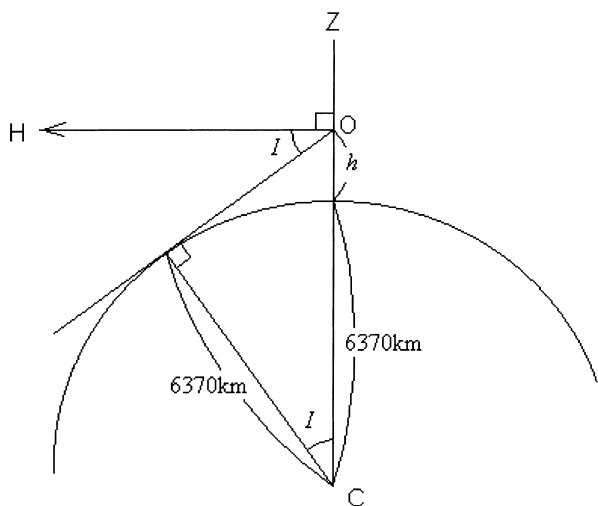


図 1. 幾何学的眼高差.

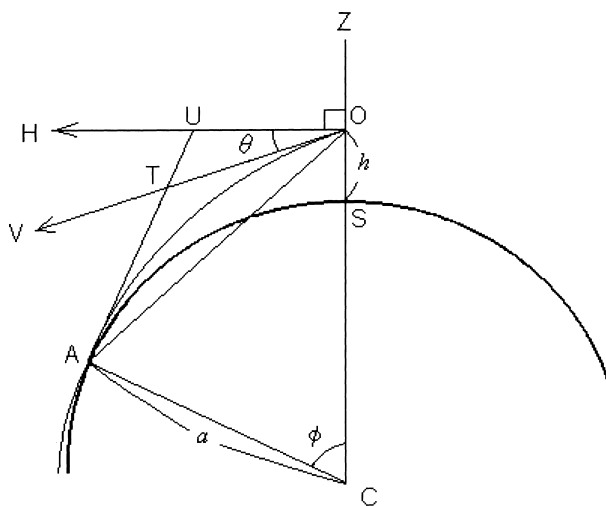


図 3. 大気中の光の屈折と眼高差.

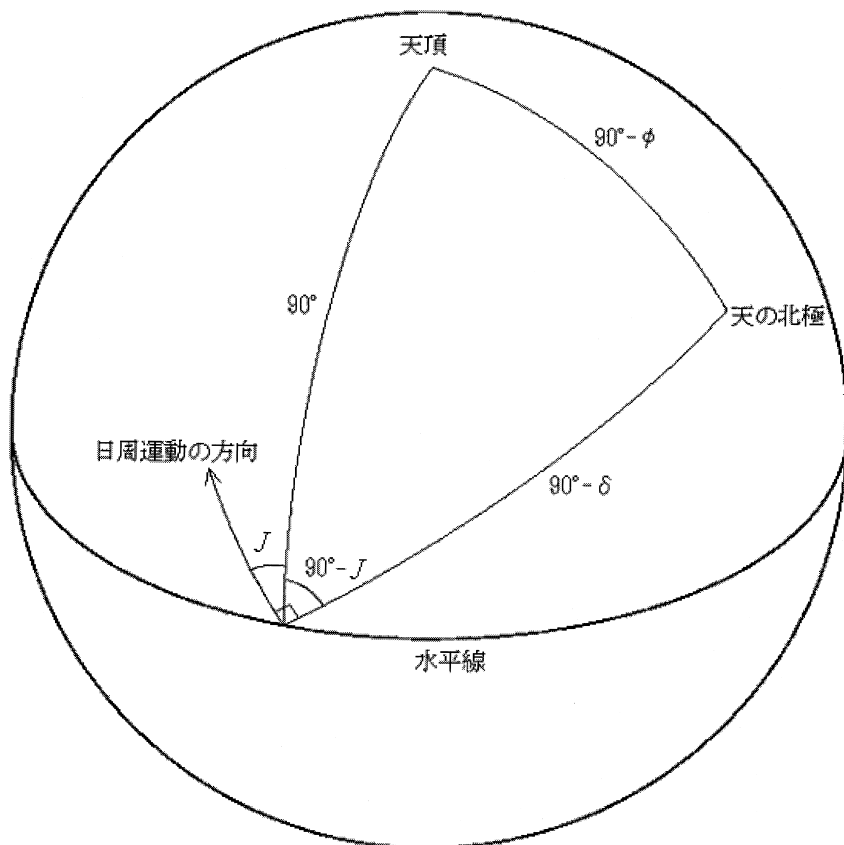


図 2. 角 J を導出するための球面三角.

3. 大気中の屈折を考慮した補正量

この節では Smart⁴⁾ による眼高差の求め方に従って、大気中の光の屈折を考慮した場合の、眼高差や日出入時への補正量を求める。

図3に示すように、地球を球とし、Cを地球中心、海水面からの高さが h m の O にいる観測者の鉛直線を COZ、また A を水平線とする。A を通った光は屈折して O に達するため、O から見た水平線は O において光線に引いた接線 OV の方向にあるように見える。角 HOV = θ が眼高差である。眼高差は、天体の高度を見かけの水平線に対して測ったときに、それから減じて鉛直線に垂直な方向から測った高度に変換するための量であり、天体の出入時刻計算のためにはこの角度の補正だけでは不十分であるのは前節に説明したとおりである。A は O から見える海面の最も遠い点であるから、A から O に到達する光線は A で海面に接する。したがって、T を A と O において光線に引いた2つの接線の交点とすると、AT は CA に垂直になる。O の標高 h m は地球の半径 a m に比べて小さいので、A から O に到達する光線は、曲率一定の円弧に沿っていると近似することができる。すると AT と OT がこの円弧への接線になることから

$$\angle TOA = \angle OAT \quad (8)$$

が成立する。 $\angle OCA$ を ϕ とする。 $\angle TOA$ は ϕ に比例すると近似することができ、その比例定数を β とおくと

$$\angle OAT = \beta\phi \quad (9)$$

となる。 β はほぼ $1/13 = 0.077$ に等しい。 $\angle OAC = 90^\circ - \beta\phi$ 、 $\angle AOC = 90^\circ - (\theta + \beta\phi)$ 、 $\angle OAC + \angle AOC + \angle ACO = 180^\circ$ より

$$\phi(1 - 2\beta) = \theta. \quad (10)$$

三角形 AOC に正弦定理を適用すると

$$\frac{\cos \beta\phi}{\cos(\theta + \beta\phi)} = 1 + \frac{h}{a}. \quad (11)$$

したがって

$$\frac{2 \sin(\theta/2) \sin \frac{1}{2}(\theta + 2\beta\phi)}{\cos(\theta + \beta\phi)} = \frac{h}{a}. \quad (12)$$

θ および ϕ は小さな角であるから

$$\theta(\theta + 2\beta\phi) = 2h/a. \quad (13)$$

式(10)を使って ϕ を消去すると

$$\theta^2 = 2(1 - 2\beta)h/a. \quad (14)$$

$\beta = 0.077$ 、 $a = 6.37 \times 10^6$ を代入し、 θ を角度の分単位で表すと

$$\theta = 1.777\sqrt{h}. \quad (15)$$

これは第2節の式(6)に対応する、光の屈折を考慮した場合の眼高差を表す式である。ここに現れた角度 1.777 を時間に換算すると、理科年表の標高についての補正式(1)に現れる 0^m118 に一致することから、それはこの眼高差を表す式から導かれたものであることがわかる。天体位置表の日出入時刻計算に現れる、眼高 4.6 m における眼高差 3.8 も式(15)から得られる値であ

る*。しかし、これは、上にも述べたように、観測された高度への補正式であり、出入時刻への補正には不十分である。正しくはさらに光が A から O まで進む間に生じる光線の進む方向の変化 $\angle VTA$ をも考慮する必要がある。すなわち、出入時刻への補正に必要な屈折量は $\theta + \angle VTA = \angle HUA = \phi$ であり、式(10)と(15)から

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{1 - 2\beta} \theta \\ &= 2.09\sqrt{h}. \end{aligned} \quad (16)$$

O の真下の点 S から水平線 A までの距離 S は ϕ をラジアン単位で表して

$$\begin{aligned} S &= a\phi \\ &= 3880\sqrt{h} \text{ (meters)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Woolard and Clemence⁵⁾ は米国標準大気のパラメータを用いて計算した S の値を標高 250 feet (≈ 76 m) から $100,000$ feet (≈ 30 km) まで与えているが、それらの値は式(17)から得られる値とほぼ 2% 以内の差で一致している。なお、Newcomb⁶⁾ は式(15)と(16)を

$$\theta = 1.76\sqrt{h}, \quad (18)$$

$$\phi = 2.11\sqrt{h} \quad (19)$$

と与え、米英暦 *The Astronomical Almanac* の解説書⁷⁾ では上式の係数をそれぞれ 1.75 、 2.12 と与えている。

式(16)より、日出入時刻に対する標高 h m の効果は理科年表で用いられている式(1)ではなく、

$$\Delta t = 0^m140 \sqrt{h} \sec(\phi + \delta) \sec(\phi - \delta) \quad (20)$$

にすべきであることがわかる。なお、月の出入時刻に対する効果を求める場合は、月に対する地球の自転周期が平均 24^h50^m5 であることから、式(20)にさらに $24^h50^m5/24^h = 1.035$ を乗じる必要がある。

念のために断っておくが、この節で求めたものは地平大気差(視高度 0° 、すなわち鉛直線に垂直に入射してくる光線の大気差)以外に必要な補正量である。もし、大気差の補正として、視高度が $-\theta$ (θ は眼高差で、図3における $\angle HOV$) に対する量を用いる場合には、それ以外に必要な補正量は眼高差 θ のみになる。理科年表や天体位置表における誤りは、補正量として、地平大気差と眼高差しか考慮していないところにある。なお、天体位置表における日出入時刻計算では地平大気差 34.5 と眼高 4.6 メートルにおける眼高差 3.8 を使用していることになっている。この場合、「地平大気差」の意味が明確に記載されていないが、これを眼高 4.6 メートルにおける見かけの水平線に接する光に対する大気差と考えれば間違いとは言えないことになる。しかし、そうであるとすると、眼高 0 に対する地平大気差(すなわち鉛直線に垂直に入射してくる光の大気差)は 33.8 (眼高 4.6 メートルにおける地平大気差 34.5 より 0.7 小さい値)になるはずで、同じ天体位置表で眼高 0 に対する地平大気差として使用されていると見なせる、月食が見られる地域を判定する式

* 本稿査読者によると、天体位置表で採用している眼高差の式は Bessel による $\theta = 1.776\sqrt{h}$ とのことである。

(2002年版の表の説明第87項(2))の $34'4$ や、日食の際の日出没時を計算する式(同第90節(5))の $34'23''$ とは大きく異なることになる。

4. 過去の理科年表その他における標高補正

第1節に述べたように、理科年表の暦部前半に載っている日月出入時刻は標高0mにおけるものであるため標高補正はなされていない。日月出入時刻で標高補正がなされているのは日月食(日面経過を含む)が日月出入にかかる場合だけである。現在の理科年表では、日食における日出入の計算において不十分な式(1)を使用しているが、月食における月出入の時刻を調べてみると、それは補正すべき光の屈折量として正しい式(16)を使用していることがわかる(ただし月出入時刻は月の上端が水平線に一致したときとしている。なお、その計算結果が掲載されているのは最近では1997年版が最後で、1998年版から2001年版までは月出入にかかる月食はない)。つまり、間違っているのは日出入時刻の計算だけであり、月出入時刻は正しく計算されているのである。

では過去の理科年表ではどうであったかについて、予報計算を行って判明した事実をここでまとめておく。

日食における日出入時刻は1943年版までは標高を考慮していないが、1955年版から1985年版までは標高の効果が正しい補正式によって計算されている。しかし、1992年版では誤った標高の効果の計算式に変更されている。なお、1944年版から1954年版までと1986年版から1991年版まで、および1993年版から現在(2001年版)までは計算例(日出入にかかる日食)がない。

水星の日面経過における日出入時刻については1970年と1973年しか計算例がない。1970年の時刻は標高の効果が算入されていることは間違いないが、正誤いずれの補正式を用いても、表値を再現することはできない。特に、標高が大きい京都の時刻は誤差が $1^m.9$ に及ぶが、これは屈折角を実際の36%にした場合に相当する。1973年の時刻は正しい補正式によって計算されている。1999年の水星の日面経過ではこれまでの慣例に反し日出の代わりに水星の出の時刻における状況が掲載されているが、これは国立天文台暦計算室からの依頼により筆者が計算したもので、水星の出に対する標高の効果は正しい補正式により計算されている。日出時の状況を掲載しなかったのは日出時(太陽の上端が水平線に一致したとき)には水星はまだ水平線下のため日面経過は観測できず、日面経過のページに載せる予報としては不適当であると筆者が判断したことによる。

月食における月出入時刻については、1952年版までは標高を算入せず、月の中心が水平線に一致したときになっていたが、1953年版以降は標高の効果の正しい補正式によって計算し、月の上端が水平線に一致したときを与えるようになっている。特に、1986年版には解説に間違った補正式(1)が与えられているにもかかわらず

ず、月食における月入の時刻は正しく計算されていることがわかる。なお、計算に用いた経緯度・標高の値が明記されるようになったのは1952年版からで、1953年版では経緯度・標高は1952年版を参照するように書かれてあるが、1952年版と1953年版では上記のとおり計算方式が異なっている。

なお、国立天文台暦計算室によると、理科年表の計算で実際に使用されている補正式は日食について式(18)、月食について式(19)である。

理科年表についてまとめると、1986年版、1989年版、1996年版に誤った補正式が掲載されているが、標高の効果を算入するようになった1953年以降で間違った出入時刻が掲載されているのは、1970年の水星の日面経過と1992年の日食のみであるということになる。

天体位置表では、日出入時刻が掲載されるようになった1945年版から眼高4.6mにおける眼高差 $3'8$ と地平大気差 $34'5$ が用いられている。海上保安庁水路部編集の天測暦でもまったく同じである。これらは明治時代からの海軍航海年表に端を発している。ただし、当初は「眼高八十五呎トシ太陽上邊ノ正ニ地平線ト接觸スル時刻ヲ示ス⁸⁾」と書かれていただけで、現在と同じ数値が明記されるようになったのは大正時代に入ってからである⁹⁾。なお、眼高4.6mは船上での観測における典型的な標高を15フィートとしてメートルに換算したものと考えられる。

海上保安庁水路部では2000年末よりそのホームページ

<http://www.jhd.go.jp/cue/KOHO/hatsuhi/hinode.htm>

において、初日の出の時刻に対する標高による補正値のグラフを掲載しているが、このグラフは誤った補正式によって描かれたものである。

米英暦 *The Astronomical Almanac* では日出入時刻は海水面における値を掲載し、標高の効果は算入していないが、その解説書には標高の効果の計算について正しく解説されている⁷⁾。

出入時刻に対する標高の効果について解説した日本語の書物は少ないが、「こよみ便利帳¹⁰⁾」および「新こよみ便利帳¹¹⁾」には理科年表と同じ誤った補正式(1)が与えられている。「日の出・日の入りの計算¹²⁾」では標高 H mに対する補正角 E の式(1.12)を $E=2'12\sqrt{H}$ と正しく与え、「地球に大気がまったくない場合には、見かけの地平線の伏角は、 $E=1'92\sqrt{H}$ になる。したがって、式(1.12)との係数の差 $0'20$ が大気屈折の影響である。」という正しい説明をしているにもかかわらず、そこに掲載している図1.6の E は大気がない場合の地平線の伏角より小さい眼高差を表していて、図と説明が完全に矛盾している。

5. まとめ

出入時刻に対する標高の効果については日本で発行さ

れている天体暦や書物等において誤った補正式が広く使用されていることが明らかになった。地平大気差の他に考慮すべき屈折角は式 (16), 日出入時刻への補正量は式 (20) で与えられる。

今後はこれらの正しい式を使用するよう要望する。

謝 辞

国立天文台暦計算室の中井 宏・伊藤節子両氏には同室で出入時刻補正に使用している屈折角の計算式に関する情報を提供いただいたことに感謝する。また、本稿の無名査読者には適切な助言をいただいたことに感謝する。

参考文献

- 1) 東京天文台：理科年表 1986 年版，丸善，p. 暦 6 (1985).
- 2) 国立天文台：理科年表 1989 年版，丸善，p. 暦 6 (1988).
- 3) 国立天文台：理科年表 1996 年版，丸善，p. 暦 6 (1995).
- 4) W. M. Smart: in *Text-Book on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, pp. 317–319 (1971).
- 5) E. W. Woolard and G. A. Clemence: in *Spherical Astronomy*, Academic Press, p. 215 (1966).
- 6) S. Newcomb: in *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan Company, p. 203 (1906); republished by Dover Publications, Inc., New York (1960).
- 7) B. D. Yallop and C. Y. Hohenkerk: in *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, Ed. P. K. Seidelmann, University Science Books, p. 488 (1992).
- 8) 例えば，水路部：明治四十四年海軍航海年表，p. 274 (1910).
- 9) 例えば，水路部：大正九年航海年表下巻，p. 211 (1919).
- 10) 暦計算研究会編：こよみ便利帳，恒星社厚生閣，p. 38 (1983).
- 11) 暦計算研究会編：新こよみ便利帳，恒星社厚生閣，p. 34 (1998).
- 12) 長沢 工：日の出・日の入りの計算，地人書館，p. 16 (1999).