

標準写像における ファレー型非バーコフ周期軌道と不安定ゾーン

山口喜博¹, 谷川清隆²

(2010年4月27日受付：2010年8月25日受理)

Non-Birkhoff Periodic Orbits of Farey Type and A Zone of Instability in the Standard Map

Yoshihiro YAMAGUCHI and Kiyotaka TANIKAWA

Abstract

In a monotone twist map defined on infinite cylinder, as is well-known, there are orbits which preserve the cyclic order of orbital points, and are orbits which do not preserve it. More precisely, an orbit is said to be order preserving if its orbital points are arranged like the orbital points of a point under rigid rotation. In the case of periodic orbits, these are called the order preserving periodic orbits or Birkhoff periodic orbits. Our standard map is a typical example of monotone twist maps.

Order preserving periodic orbits are, so to say, representatives of the integrable state of dynamical systems described by twist maps. Order non-preserving periodic orbits (or non-Birkhoff periodic orbits) do not exist if the system is integrable, and are born through saddle-node bifurcation as the external parameter of the system changes and the degree of non-integrability increases. Thus, non-Birkhoff periodic orbits are good probes to explore the structure and evolution of chaos.

Methods of analysis of non-Birkhoff orbits have been gradually developed. Among them are the braid method (Boyland, Hall), the variational method (Aubry, Mather), and the use of the reversibility (Yamaguchi–Tanikawa). In the last method, an additional constraint, i.e., reversibility, is included in the setting of the problem. Because of this constraint, the treatment of non-Birkhoff periodic orbits is geometrical and elementary.

In the present report, we want to follow the evolution of chaos in the dynamics of the standard map, or the Hamiltonian system of two degrees of freedom using the reversibility of the map. We divide the whole description into three steps.

In the first step, we introduce the notion of resonance regions and resonance chains of Birkhoff periodic orbits. A resonance region is bounded by the arcs of the stable and unstable manifolds of adjacent Birkhoff saddles. A resonance chain is the union of the resonance regions of a Birkhoff orbit. One important characteristic of a resonance chain is that it divides the infinite cylinder into three, that is, the upper and lower regions and the chain itself. Orbital points once going out of resonance chains do not come back to any resonance chain, thus and non-periodic. Orbital points of periodic orbits move from one resonance chain to another. Thus, we may classify periodic orbits according to the way of movement over resonance chains. In particular, the symmetric non-Birkhoff periodic orbits of Farey type (NBF), which move over two resonance chains, are introduced. We prove the existence of NBF in the standard map, and derive dynamical orders among these orbits. We state the result as Theorem 1. We discuss the relation of our result and Boyland’s result (Boyland, 1992).

In the second step, several properties of NBF are derived. Using the dynamical ordering for the symmetric non-Birkhoff periodic orbits of Farey type (NBF), the properties of the limit rational or irrational rotation numbers at which the rotation numbers of NBFs accumulate are discussed, and also the relation between the critical value at which KAM curve is disintegrated and the critical value at which NBF appears is derived.

In the third step, Mather’s connecting theorem is proved with elementary geometrical method essentially using the reversibility of the standard mapping instead of variational method. In the proof of the existence of orbits connecting quasi-periodic orbits of the same rotation number, non-monotone quasi-periodic orbits (NMQs) are found, in which almost all orbital points are located in the gap of the Aubry–Mather set. The dynamical order relations among NMQs are derived. The existence of orbits connecting different irrational rotation numbers is proved using also non-Birkhoff periodic orbits of Farey type. Orbits which move extremely slowly from one chain to another are found.

¹帝京平成大学, yy-chaos@jb3.so-net.ne.jp

²国立天文台, tanikawa.ky@nao.ac.jp

1 序および結果の陳述

1.1 目的

標準写像に代表される, 円筒上で定義された「ねじれ写像」には, 良く知られているように, 円順序を保存する軌道とそうでない軌道が存在する. すなわち, 軌道が時間とともに円筒を巡っていくとき, 軌道点が円周上の剛体回転による軌道点と同じ順序で並ぶならば, この軌道は順序保存軌道 (あるいは単調軌道) と呼ばれる. 周期軌道の場合は, 順序保存周期軌道, あるいは単調周期軌道, あるいはバーコフ周期軌道と呼ばれる. 順序保存軌道は, 以前からよく知られているものであって, 円筒を巻く不変曲線 (いわゆるKAM (コルモゴロフ-アーノルド-モザー) 曲線) 上の軌道であるとか, 不変曲線が壊れたあとに残るオーブリー-マザー集合内の軌道である. 前者は, モザーによって存在が示され, 後者は, 1980年代に, 変分法で発見されて, どちらも多くの研究の対象となってきた. これら軌道の特徴が順序保存性であることが意識され, 次に順序非保存の軌道が興味の対象となった.

円筒上のねじれ写像に現れる**非バーコフ周期軌道** (以後, NBと記す) の性質についてはボイランド (Boyland) [1] が基礎的なことがらを概観した. 長大かつ難解な論文である. 「基礎的」ではあるけれども「初等的」ではない. ニールセン-サーーストン (Nielsen-Thurston) 理論を紹介し, 周期解から組みひもを構築して位相エントロピーを計算することを教える. 理論を計算に落とすベストビナー-ヘンデル (Bestvina-Händel) [2] の**線路法アルゴリズム**を使ってみせる. ただし, ボイランドの紹介したやり方でエントロピーを計算できる周期解は限られているので, 非バーコフ周期軌道はその後も調べられた [3, 4]. 筆者らは, 独自の発想で非バーコフ周期軌道を調べてきた [5, 6, 7, 8]. 研究の動機として, NB同士の力学順序の情報から位相エントロピー h_{top} の下界を決定したいということがある, NB間の力学順序関係は, パラメータを変えたときの系の複雑さの進化に直接関係する. 1次元力学系において成功をおさめたシャルコフスキーの順序 [9] とカオスの度合の進展を2次元力学系に拡張するという野望が研究者を駆り立てている.

筆者らは, 標準写像を含む単調ねじれ写像を題材にして, 回転数 $1/q$ ($q \geq 3$) の対称非バーコフ周期軌道 (SNB) 同士のいくつかの力学順序関係を導いた [7, 8]. 次なる目標は, 一般の回転数の

場合に SNB 間の力学順序を導くことである. ところが, パラメータを増やしていくと, 同一回転数のSNBが次々とサドル-ノード分岐で生まれてくる. だから, 同じ回転数であっても, あるSNBを別のSNBと区別する必要がある. つまり軌道の特徴づける指標を回転数以外にあらたに加える必要がある. 1次元から2次元へと写像の次元を上げて軌道の力学順序を出そうとするときに避けて通れない問題である [10].

本論文では, 新たな指標を幾何学的対象物 (力学的対象物というべきか) を使って以下のように構成する. 分数 p/q を2つの分数 p_1/q_1 と p_2/q_2 ($p_1/q_1 < p_2/q_2$) に分ける. p_1/q_1 と p_2/q_2 は p/q の**ファーレイ区間**の端点であるように取る. すなわち, $p/q = (p_1 + p_2)/(q_1 + q_2)$, $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$ (A.8節). 力学を円筒上で考えたとして, SNBの各軌道点が**共鳴鎖** $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ の各**共鳴領域**にひとつずつ入り, さらに, 共鳴鎖 $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ の各共鳴領域にひとつずつ入っており, これ以外に軌道点はないとする. (共鳴領域と共鳴鎖の定義に関してはA.6節参照.) これらの条件を満たすSNBを, **ファーレイ型非バーコフ軌道** (NBF) と呼ぶことにする. NBFの間の力学順序から, 外部パラメータを変えたときの, 力学系としての標準写像の進化の道筋が理解できる.

ねじれ写像の位相エントロピーの下界を計算する方法として2つのやり方がある. 最初の手法は, **組みひも法**である. NBの軌道点の順序に関する情報から組みひもを構築する. 組みひも型から, 線路法アルゴリズム [2, 11] またはビューロー (Burau) 行列 [12, 13] を用いて遷移行列 M または M_B を作る. すると, 位相エントロピーは $h_{\text{top}} \geq \ln \lambda_{\text{max}}$ で与えられる. ただし, λ_{max} は M または M_B の最大固有値である. 第二の手法は, **トレリス法**と呼ばれる [14]. このやり方では, 安定多様体および不安定多様体の構造に関する情報を使って遷移行列を構築する. どちらの手法の場合も, アルゴリズムはニールセン-サーーストン理論 [15] に基づく.

本概観論文の目的は3つある. 最初に, 標準写像において, NBFの存在を示し, NBFの間の力学順序を確立する. 結果は定理1として述べる. 第二に, NBFのいくつかの性質を紹介する. そして, NBFの無限列を取り, その極限として得られる軌道と臨界パラメータ値の関係を出す. 例えば, 黄金比回転数を極限とする軌道から, 最終KAM曲線の崩壊パラメータ値が得られる. 第三に, マザーの連結軌道について考察する. 同一の回転数を

連結する軌道が新しい型の準周期軌道であることを示す．これらの結果は，文献 [16], [17], および [18] において，別々に証明した．本報告においては，証明や結果の記述をわかりやすくするつもりである．そのために，補遺Aの各節で準備を行う．それによって，写像の下での対称軸の弧の振る舞いや安定多様体と不安定多様体の構造に関して幾何学的な理解が得やすくなるものと期待する．

本論文で考察する標準写像 $\tilde{T}$ は無限円筒 $(\tilde{x}, y) | \tilde{x} \in S^1 = [0, 2\pi), y \in \mathbf{R}$ 上で定義される：

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + f(\tilde{x}_n), \\ \tilde{x}_{n+1} &= \tilde{x}_n + y_{n+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで， $f(x) = a \sin x$ であり， a は正のパラメータである．原点 $\tilde{P} = (0, 0)$ はサドル不動点である．もうひとつの不動点 $\tilde{Q} = (\pi, 0)$ は $0 < a < 4$ のとき楕円点であり， $a > 4$ のとき反転サドルである．

$\tilde{P}$ や $\tilde{Q}$ を普遍被覆 $\{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ に持ち上げたときは，波線を取り去って $P_{n,0} = (2n\pi, 0)$ や $Q_{n,0} = ((2n+1)\pi, 0)$ と書く． n は整数である．標準写像の持ち上げ T は「単調ねじれ条件」 $\partial x_{n+1} / \partial y_n = 1 \neq 0$ を満たす．

本論文を通じて有効な前提条件を述べておく．

前提条件.

(I) バーコフサドルの安定多様体と不安定多様体は，不安定ゾーン内で（主ホモクリニック点では）横断的に交わる．

(II) バーコフ周期軌道は，各既約回転数ごとにちょうど2個ある．

注意. 条件 (I) について，Bangert (文献 [19] の定理 (4.8)) の証明によると，隣り合うサドルはヘテロクリニックに結ばれている．つまり，サドル周期軌道の隣り合う軌道点は片方の安定多様体ともう一方の不安定多様体で結ばれている．この連結は滑らかな連結かもしれない．けれども，サドルがバーコフ不安定ゾーン内に入るとき，あるいは最後のKAMが存在しないとき，滑らかな連結は起こり得ない．だから連結は，横断的交差を伴うか，非横断的交差を伴う．いずれの場合にしても，同じ軌道の隣り合う点の安定多様体と不安定多様体の弧は領域を囲む．この領域を「共鳴領域」と呼ぶ．図38に例を示した．以後の議論は非横断的交差の場合でも通用するが，記述を簡単

にするため，横断的交差の場合のみ考察する．それが前提条件 (I) である．ホモクリニック点とサドルを結ぶ安定多様体と不安定多様体の2本の弧が途中で交わらないとき，このホモクリニック点は主ホモクリニック点と呼ばれる．

条件 (II) について．一般に，バーコフ周期軌道は $2n (n \geq 1)$ 個存在する．筆者らは，対称バーコフサドルの共鳴領域の中の点の振る舞いだけに興味がある．この共鳴領域の存在は条件 (I) により保証される．非対称バーコフ軌道がたとえ存在したとしても，その存在を忘れることができる．簡単のため，条件 (II) を置いた．数値的には条件 (II) は正しい．

1.2 結果: 定理 1

本概観論文が述べる最初の結果である．

‘ $\rightarrow$ ’ 印は2つの周期軌道の間の強制関係を表すものとする．すなわち， $O_1 \rightarrow O_2$ は，周期軌道 O_1 の存在から周期軌道 O_2 の存在が言えることを意味する．定理の記述に，刈り込みシュテルン–ブロコ樹 (Trimmed Stern–Brocot tree) (TSBT) [20] を使う (A.4節参照)．

定理 1. 標準写像において以下の主張が成り立つ．

(i) $p/q \in (0, 1)$ はTSBTの任意の要素であるとする．回転数 p/q のNBFが存在するようなパラメータ a の値が存在する．

(ii) $p/q \in (0, 1)$ はTSBTの要素であるとする． p_l/q_l は p/q の左娘， p_r/q_r は右娘であるとする（左娘，右娘についてはA.4節参照）．このとき，

$p/q - \text{NBF} \rightarrow p_l/q_l - \text{NBF}$ および $p_r/q_r - \text{NBF}$ が成り立つ．

(iii) $n \geq 2, q \geq 5$ および $p \neq 1, p \neq q-1$ に対して，
 $1/n - \text{NBF} \rightarrow p/q - \text{NBF}$

および

$$(n-1)/n - \text{NBF} \rightarrow p/q - \text{NBF}$$

が成り立つ．

(iv) h_{top}^B はボイランド組みひも型 $\sigma_1^{-2} \rho_q^B (q \geq 3)$ を使って得られる位相エントロピーの下界であるとする． $p/q - \text{NBF}$ を使って得られる位相エントロピーの下界は h_{top}^B 以上である．

1.3 定理 1 の拡張

二番目の話題は，定理 1 の拡張である．3つの方向に拡張する．すなわち，

i) 新しい型の周期軌道を導入する．

ii) シュテルン-ブロコ樹 (SBT) を, ある指定した道 $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ で登って行ったとき, NBFの極限軌道を求める. 同時に, パラメータの極限值および極限位相エントロピーなどを求める.

iii) 複数の共鳴鎖をつなぐゆっくり動くNBの存在.

上のそれぞれについて説明しよう. 第一に, 新しい型の周期軌道を導入する. p/q -NBF は, ただ2つの共鳴鎖にのみ軌道点を持ち, 加えて特別な条件を満たす独特な周期軌道である. すなわち, $p=p_1+p_2$, $q=q_1+q_2$ であって, p_i/q_i ($i=1,2$) が SBT に属し, 軌道点は鎖 $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ および鎖 $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ にのみ属する. そして特別な条件として $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$ を満たす. その次に単純な周期軌道とはいえば, 軌道点がやはり2つの共鳴鎖 $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ および $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ に属し, p_i/q_i ($i=1,2$) が SBT に属し, $p=p_1+p_2$, $q=q_1+q_2$ を満たすのではあるが, $p_2 q_1 - p_1 q_2 \geq 2$ なるものである. p と q を決めても, この型の軌道が多数あることがわかる. 簡単のため, $p_2 q_1 - p_1 q_2 \geq 1$ なる軌道を p/q -NB2C と呼ぶことにする. NBF は NB2C の中で特殊な条件を満たすものとなる. そして, NBF と一般の NB2C の間の力学順序を4節で導く. 結果は定理3.0.1で述べる.

第二の拡張方向. はじめに有理数回転数に集積する道 $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ を考え, 集積パラメータ値における位相エントロピーの下界を見積もる. そのための簡単な規則を見つけた. この事実を定理3.1.1で表現する. 次に, 命題3.2.1によって, どんなに $a > 0$ が小さくても NBF が存在すると言う. 最後に, 無理数 ω に集積する道 $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ から次の結果を得る.

定理2. $a_c(\omega)$ は ω -KAM が崩壊する臨界パラメータ値であるとする. $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ は TSBT 内の分岐をとる道であって, ω に収束するとする. サドル-ノード分岐によって p_n/q_n -NBF が生まれる臨界値を $a_c(p_n/q_n\text{-NBF})$ とする. このとき, 以下の関係が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_c(p_n/q_n\text{-NBF}) = a_c(\omega).$$

定理の意味するところは, KAM 曲線が崩壊するや否や, この KAM 曲線のあった近傍に NBF が分岐するということである. これは次の定理の別証になっている:

定理 (ボイランド-ホール [4]). 円環 A の面積保存単調ねじれ写像が回転数 ω の不変円を持たないための必要十分条件は, f が ω への近似分数に等しい回転数の非バーコフ軌道を持つことである.

第三の拡張方向. 著者らの発見したところによると, ある共鳴鎖を出発して, 任意に長い時間かけて別の共鳴鎖に到達する軌道がある. このことは定理3.2で述べる.

1.4 マザーの連結軌道

本概観論文の三番目の話題は, マザー (Mather) [21, 22] が存在を証明した面白い軌道に関することである. 筆者らの得た結果を述べるために, 有名な2つの定理を紹介する. ひとつはオーブリー-マザー (Aubry-Mather) 集合の存在に関する定理. もうひとつは不安定ゾーン内のマザーの連結軌道に関する定理である. 後者の軌道が, 三番目の話題の中心の対象物である. 面積保存かつ方向保存のねじれ写像でゼロ流量条件を満たすものは, 「完全面積保存, 方向保存ねじれ写像」とよばれる (EAPT と略されることがある [24], [25]). われわれの研究対象の「標準写像」はこの類に属する.

定理A (オーブリー-マザー [21, 22, 23, 26]). 任意の回転数 ω に対して, 作用極小不変集合があり, その集合の各軌道は円筒を回転数 ω で巡る. 各軌道の閉包は円周であるか, 不変コントロール集合である. 後者はオーブリー-マザー集合と呼ばれる.

回転数 ω の作用極小軌道の集合を Σ_ω と記そう. よく知られているように [19, 27], この集合は回帰成分と非回帰成分に分けることができる. 無理数回転数 ω の場合, 回帰成分 $\Sigma_\omega^{\text{rec}}$ は KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 曲線であるか, カントール集合 (AM 集合) である. 後者はカントラスとも呼ばれる. 有理数の場合, すなわち, $\omega = p/q$ のとき, $\Sigma_{p/q}$ は一般に回転数 p/q のサドル型周期軌道の有限和 (これを p/q バーコフサドル軌道と呼ぶ) に, これらのサドルへのホモクリニック軌道 (非回帰成分) を加えたものである. 一般の場合, 系が可積分なら, $\Sigma_{p/q}$ は曲線へと縮退する.

AM 集合は, 回転数 p_n/q_n の作用極小周期軌道列の極限軌道として求まる. すなわち, $n \rightarrow \infty$ のとき $p_n/q_n \rightarrow \omega$ なる極限回転数を持つ軌道である

[28]. $\Sigma_{\omega}^{\text{rec}}$ がカントール集合の場合、このカントール集合の間隙を Δ_{ω} で表す. Σ_{ω} の非回帰成分は、カントール集合の端点に漸近的な軌道からなる. これらの軌道は間隙に住んでいる. Bangert [19] の予想によると、生成的な場合、ほとんどの ω に対して $\Sigma_{\omega}^{\text{rec}} = \Sigma_{\omega}$ である. すなわち、間隙 Δ_{ω} には作用極小点はない.

$Z(\omega_-, \omega_+)$ はバーコフ不安定ゾーンを表すとす [29]. ただし、 ω_- と ω_+ ($\omega_- < \omega < \omega_+$) は、不安定ゾーンの上下の境界を構成する KAM 曲線の無理数回転数である. それらをとくに ω_- -KAM および ω_+ -KAM と呼ぶことにする.

定理 B (マザーの連結定理). 任意の 2 つの回転数 $\omega, \omega' \in [\omega_-, \omega_+]$ に対して、EAPT に点 $z \in Z(\omega_-, \omega_+)$ が存在し、 z の軌道は $\Sigma_{\omega}^{\text{rec}}$ に α 漸近し、 $\Sigma_{\omega'}^{\text{rec}}$ に ω 漸近する. ただし、 $\omega = \omega_-$ (または $\omega' = \omega_+$) なら ω (または ω') が無理数であることを前提とする.

以下では、 ω が無理数の場合を議論する. マザーの連結軌道は局所作用極小であるが、大域的には作用極小でない. 円筒上のこの軌道を持ち上げたときの角度座標の双無限配位 $(\dots, x_i, \dots)$ には条件が課される. すなわち、普遍被覆上で x_i は区間 J_i に属し、しかも、区間の内点である. ここで、 J_i は、 $|i|$ が大きいときに有界条件を満たすものである. この列において、 x_i は単調に増大する. このことからすると、対応する軌道は単調であり得る. しかし、軌道としては、これは式 (42) の意味で非単調である.

定理 B はカロシン (Kaloshin) が別証明を行なった [30]. 彼は、付加的な仮定を設定してマザーの長大な証明を短かくした. すなわち、任意の周期点の線形化が単位固有値を持たないこと、また安定多様体と不安定多様体が横断的に交わることを仮定した. 言い替えると、彼は AM 集合にある種の双曲性を仮定したのである.

本報告では、マザーの連結定理のさらに別の証明を行なう. 筆者らの場合、ねじれ写像は付加的な性質を持つ. ひとつはバーコフ可逆性である. 写像の可逆性は変分法の代役をする. もちろん、筆者らのやり方がいいとは言わない. ただ、証明が初等的になる. 手法が簡単なので、具体的な軌道例を示すことができ、連結軌道に関して幾何学的描像を持つことができる. ふたつ目は、弱い双曲性とバーコフ軌道の数に関する仮定である. これらは「前提条件」で述べた. 定理 1, 2, 3 お

よび 4 は、これらの前提を使わなくても証明できるはずである. これらを加えたのは、証明を見通し良くするためである.

定理 B に関して論評を加えよう. 定理の内容は、 $\omega \neq \omega'$ であるか $\omega = \omega'$ であるかによって異なる. $\omega \neq \omega'$ の場合、回転数 ω と ω' の 2 つの軌道を結ぶヘテロクリニック軌道が存在する. このことからすると、2 つ以上の軌道を連結する軌道が存在し得る. 実際、マザー [22] は第二の連結定理によって、回転数 ω_i ($i \in \mathbb{Z}$) の軌道の ϵ_i 近傍に、あらかじめ与えられた写像回数で順番に入り込む軌道の存在を示した. 何人かの研究者がその後、高次元ハミルトン系におけるアーノルド拡散の存在をこの軌道を使って示そうとした [31, 32].

$\omega = \omega'$ の場合、明らかに、連結軌道は、過去に回転数 ω を持ち、未来に回転数 ω を持つ. これはホモクリニックかつ準周期軌道である. このような準周期軌道の中で、一時期、AM 集合に住んでいるリプシッツ曲線の外に出る準周期軌道がある. 外にはみ出る少数の軌道点のせいで、この軌道は非単調になる. これは新たな型の準周期軌道である. この軌道を、「非単調準周期軌道」と呼び、NMQ (non-monotone quasi-periodic orbits) と記す. NMQ はサドル-ノード分岐で生じる. マザーの連結軌道は局所作用極小である. しばらくの間、作用の変分を見積もることはしない. 作用停留であることは明らかであるが、これらが作用極小なのか作用極大なのか知らない. ただし、それらのうちひとつは、作用ミニマックスまたは極大である.

無理数 ω の AM 集合の間隙に住む軌道はどんな軌道か? これは自然な疑問であるが、答えられていないようだ. カントール集合にホモクリニックな準周期軌道で作用ミニマックスなものが存在する可能性があることは知られているが [33]. 本報告では、無数の NMQ が存在し得るという答えを与える (定理 3). ほとんどの軌道点は間隙に存在するが、有限個の軌道点が間隙の外に出る.

さて、主結果を述べることにする. 定理 3 から定理 6 までである.

定理 3. 不安定ゾーン $Z(\omega_-, \omega_+)$ が標準写像に存在するとする. 分数列 $\{p_i/q_i\}_{i \geq 1}$ は刈り込みシュテルン-ブロコ樹内の列であって、無理数 $\omega \in (\omega_-, \omega_+)$ に収束するとする. また、ある $k \geq 1$ に対して p_k/q_k -NBF が存在するとする. このとき、

(i) 非単調準周期軌道 $\frac{p_n}{q_n} \oplus \omega - \text{NMQ}$ が $n \geq k$ に對して存在する。

(ii) 極限 $n \rightarrow \infty$ において, $\frac{p_n}{q_n} \oplus \omega - \text{NMQ}$ は, オープリーマザー集合 $\Sigma_{\omega}^{\text{rec}}$ の端点に, またはオープリーマザー集合の間隙内の作用ミニマックスな準周期軌道に集積する。

A.5節では, 定理 3 (i) および 3 (ii) で使われる $\frac{p_n}{q_n} \oplus \omega - \text{NMQ}$ を定義する. 定理 3 (i) によって, 新たな型の準周期軌道が与えられ, 定理 3 (ii) によってこれらの軌道と AM 集合との関係が与えられる. 定理 3 (ii) からは, 次のような事実が出る. すなわち, 道 $\{p_i/q_i\}_{i \geq 1}$ を通って TSBT を ω まで登って行くと, $p_i/q_i - \text{NBF}$ の極限はオープリーマザー集合 $\Sigma_{\omega}^{\text{rec}}$ の端点の軌道であるか, オープリーマザー集合の間隙内の作用ミニマックス準周期軌道である。

軌道 $O(z_0)$ が軌道 O_1 を軌道 O_2 につながるとは, $O(z_0)$ が O_1 に α 漸近であって, O_2 に ω 漸近のときである. ただし, $O(z_0)$ が O_1 に α 漸近であるとは, 両者の軌道距離が過去にゼロに近づくことであり, $O(z_0)$ が O_2 に ω 漸近であるとは, 両者の軌道距離が未来にゼロに近づくことである. これらの軌道の集合を表すために, $H(O_1, O_2)$ なる記法を導入する. O_1 と O_2 が周期軌道の場合, 両者の周期 p/q と p'/q' を使って, 連結軌道の集合を $H(p/q, p'/q')$ と書く. 同様に, O_1 が ζ_{ω} であって O_2 が $\zeta_{\omega'}$ のときは (ζ_{ω} と $\zeta_{\omega'}$ の定義は A.7 節にある), $H(\omega, \omega')$ が連結軌道を表すとする. 記法 $H(\omega, p/q)$ や $H(p/q, \omega)$ も使う. 記号 H はホモクリニックあるいはヘテロクリニックの H を表している。

定理 4. $\omega_- < p'/q' < \omega' < \omega < p/q < \omega_+$ であって, $p/q \oplus p'/q' - \text{NBF}$ が存在するとする. このとき, 以下の非単調軌道が存在する。

- (i) 連結軌道 $H(p/q, p'/q')$ と $H(p'/q', p/q)$;
- (ii) 連結軌道 $H(\omega, \omega')$ と $H(\omega', \omega)$;
- (iii) 連結軌道 $H(p'/q', \omega)$, $H(\omega, p'/q')$, $H(p/q, \omega)$, および $H(\omega, p/q)$.

次に, NMQ 同士の間の力学順序を決める結果を述べよう。

定理 5. 不安定ゾーン $Z(\omega_-, \omega_+)$ が存在するとする. 無理数 ω と ω' , 有理数 p/q と p'/q' はどれも区間 (ω_-, ω_+) に属するとする。

(i) $\omega_- < \omega < \frac{p'}{q'} < \frac{p}{q} < \omega_+$ または $\omega_- < \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} < \omega < \omega_+$ のとき, 以下の順序関係が成り立つ。

$$\frac{p}{q} \oplus \omega - \text{NMQ} \rightarrow \frac{p'}{q'} \oplus \omega - \text{NMQ}. \quad (3)$$

(ii) $\omega_- < \omega < \omega' < \frac{p}{q} < \omega_+$ または $\omega_- < \frac{p}{q} < \omega' < \omega < \omega_+$ のとき, 以下の順序関係が成り立つ。

$$\frac{p}{q} \oplus \omega - \text{NMQ} \rightarrow \frac{p}{q} \oplus \omega' - \text{NMQ}. \quad (4)$$

(iii) $\omega_- < \omega < \omega' < \frac{p'}{q'} < \frac{p}{q} < \omega_+$ または $\omega_- < \frac{p'}{q'} < \frac{p}{q} < \omega' < \omega < \omega_+$ のとき, 以下の順序関係が成り立つ。

$$\frac{p}{q} \oplus \omega - \text{NMQ} \rightarrow \frac{p'}{q'} \oplus \omega' - \text{NMQ}. \quad (5)$$

定理 6.

(i) $p'/q' \leq r'/s' < r/s \leq p/q$ のとき, 以下の順序関係が成り立つ。

$$H(p'/q', p/q) \rightarrow H(r'/s', r/s). \quad (6)$$

(ii) $\omega' \leq \Omega' < \Omega \leq \omega$ のとき, 以下の順序関係が成り立つ。

$$H(\omega', \omega) \rightarrow H(\Omega', \Omega). \quad (7)$$

(iii) $p'/q' < \omega' < \omega < p/q$ のとき, 以下の順序関係が成り立つ。

$$H(p'/q', p/q) \rightarrow H(\omega', \omega). \quad (8)$$

(iv) $\omega' < p'/q' < p/q < \omega$ のとき, 以下の順序関係が成り立つ。

$$H(\omega', \omega) \rightarrow H(p'/q', p/q). \quad (9)$$

2 節で定理 1 を証明する. 2.5 節で, 定理 1 とポイランドの定理との関係を議論する. 証明に必要な数学的道具は補遺 A でまとめて準備した. 適宜参照して欲しい。

以下で, $\mathbf{R}$ は実数, $\mathbf{Z}$ は整数, $\mathbf{Z}^+$ は非負の整数とする. また集合 A の閉包を $\text{clos}(A)$ と書く。

2 ファーレイ型非バーコフ周期軌道 (NBF) の存在

本節では, 1.2 節に述べた定理 1 を証明する. 証明に進む前に, 証明の概略を述べておく。

TSBT 内に分数 p/q が与えられたとする. このとき, $\{p_1/q_1, p_2/q_2\} = \text{FP}[p/q]$ が決まる. ゆえに $p_1/q_1 - \text{BE}$ と $p_2/q_2 - \text{BE}$ も決まる. これらの BE は共鳴鎖 $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ と $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ を伴う. これらはそれぞれ q_1 個と q_2 個の共鳴領域からなる. 少なくとも q_1 と q_2 のどちらかは奇数である. 構築法 (A.3

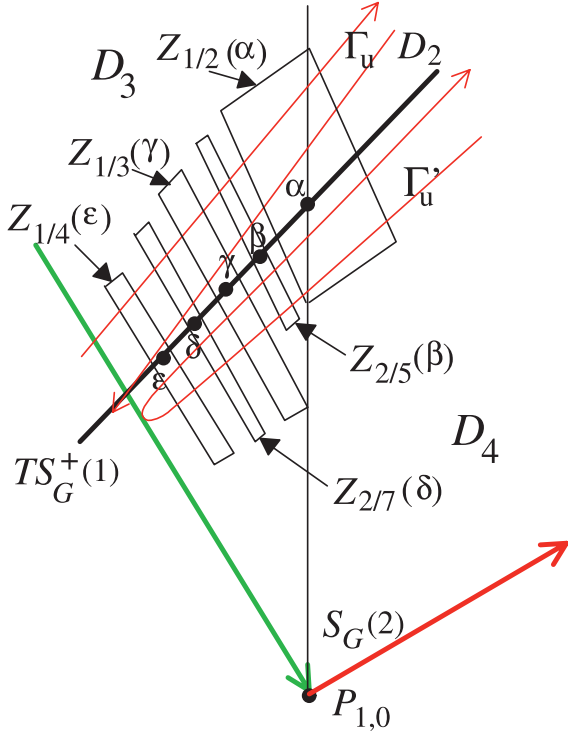


図 1 : $Z_{1/2}(\alpha), Z_{2/5}(\beta), Z_{1/3}(\gamma), Z_{2/7}(\delta)$, および $Z_{1/4}(\epsilon)$ の相対配置. α は $1/2$ バーコフ楕円軌道の点であり, β は $2/5$ バーコフ楕円軌道の点である. 以下, γ, δ も同様.

節) より, 各鎖の共鳴領域のうち 2 つは対称軸と交わる. 偶数周期の BE は S_G 上に点を持ち, 奇数周期の BE は 1 点を S_G 上に, もう 1 点を S_H 上に持つ.

命題 A.3.3 より, 鎖 $\langle Z_{p/q} \rangle$ 内の任意の点は, 自分自身も含めて, 写像の下で, 少なくとも q 回, 連続してその鎖に留まる. この性質を考慮に入れて, A.8 節で出会いの場合 $\widehat{D} = \text{clos}(D_2 \cup D_3 \cup D_4)$ を設定した (図 1 と補遺 A.8 節の図 46 参照). p_2/q_2 -BE の点 z_0 を, ある対称軸上に取って, m 回写像で $\widehat{D}$ に入るようにする. q_2 の偶奇に応じて $m = q_2/2$ または $m = q_2/2 + 1$ と取る. また, p_1/q_1 -BE の点 ζ_0 を, ある対称軸上に取って, $-n$ 回写像で $\widehat{D}$ に入るようにする. この場合も, q_1 の偶奇に応じて $n = q_1/2$ または $n = (q_1 - 1)/2$ と取る. z_0 を含む対称軸の弧の m 回目の像と ζ_0 を含む対称軸の弧の $-n$ 回目の像が $\widehat{D}$ で出会って交わることを示すことができる. 交点は p/q -NBF の軌道点である (定理 1 (i)).

TSBT 内での p_1/q_1 と p_2/q_2 の相対位置 (補遺 A.4 節の図 41) と普遍被覆上での $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ と $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ の相対位置 (命題 A.8.1) から p_1/q_1 -NBF と p_2/q_2 -NBF の出現順序関係が得られる (定理 1 (ii) と (iii)). 最後に, p/q -NBF の組みひもを構築して組みひも型 $\beta(p/q\text{-NBF})$ がボイルンド型であることを証明する. $\beta(p/q\text{-NBF})$ に対する

ボイルンドの公式を使って, 位相エントロピーの下界を導く (定理 1 (iv)).

2.1 節では, $p \neq 1$ および $p \neq q-1$ に対して定理 1 (i) と 1 (ii) の証明を述べる. $p=1$ と $p=q-1$ の場合の証明は 2.2 節で与える. 定理 1 (iii) と 1 (iv) は, それぞれ 2.3 節と 2.4 節で証明する.

2.1 p/q -NBF の存在証明と $p \neq 1$ かつ $p \neq q-1$ の場合の順序関係

$a = a^*$ とおく. このパラメータ値では, すでに述べたように (補遺 A.8 節の図 45 または図 46 参照), $W_u^1(P_{0,0})$ がはじめて $W_s^2(P_{1,1})$ に接する. 対応して $W_u^2(P_{2,1})$ がはじめて $W_s^1(P_{1,0})$ に接する. 換言すると, Γ_u は $W_s^2(P_{1,1})$ に接し, Γ'_u は $W_s^1(P_{1,1})$ に接する.

性質 2.1 $a = a^*$ のとき, Γ_u と Γ'_u のそれぞれは $\widehat{D}$ 内の各共鳴領域を 3 つに分ける.

証明. $0 < p/q < 1$ に対して, $TS_G(1)$ 上のすべての p/q -バーコフ楕円点は $(\alpha', \gamma')_{TS_G(1)}$ に含まれる (図 1 および補遺 A.8 節の図 46 参照). これらの点に伴う共鳴領域は曲線四辺形であって, 長辺は $TS_G(1)$ にほぼ垂直であり, 長辺同士は互いにほぼ平行である. 短辺のうち上側のものは D_3 に属し, 下側のものは D_4 に属す (命題 A.8.1). だから, Γ_u は共鳴領域分割する. なぜなら, Γ_u の弧 $[\epsilon, \beta']$ は D_3 の境界のひとつであり, Γ_u の弧 $[\beta', \alpha']$ は D_2 の境界のひとつだからである. 180 度の回転対称性のおかげで, Γ'_u でも同じことが言える. (Q.E.D.)

2.1.1 $2/5$ -NBF の存在証明

定理 1 (i) の証明法を説明するために, $2/5$ -NBF の場合の証明を詳しく述べる. そして, その手法を一般の場合に当てはめる.

$1/2$ -BE と $1/3$ -BE および対応する鎖 $\langle Z_{1/2} \rangle$ と $\langle Z_{1/3} \rangle$ を使う. $O(z_0)$ は $z_0 \in S_G^+(0)$ なる $1/2$ -BE とし, $O(z'_0)$ は $\pi_x(z'_{-1}) < \pi_x(z_0) < \pi_x(z'_0)$ なる $1/2$ -BS とする. ただし, z'_{-1} と z'_0 は z_0 に左と右からもっとも近いバーコフサドル点である. (A.3.2 節では $\{z_i^*\}$ や $\{z_i''\}$ を使ったが, 回転数の分子が 1 の軌道では, $\{z_i^*\} = \{z_i''\}$ である.) Γ_u は $Z_{1/2}(z_2)$ を 3 つに分ける (性質 2.1). 対称性より, γ_s は $Z_{1/2}(z_1)$ を 3 つに分ける. ゆえに $T^{-1}\gamma_s$ は $Z_{1/2}(z_0)$ を 3 つに分ける. 簡単に確認できるように, Γ_u と $S_G^+(2)$ の 2 つの交点は $z_2 (= (2\pi, \pi))$ より上にある. 対応して, $T^{-1}\gamma_s$ と $S_G^+(0)$ の 2 つの交点は z_0 より上にある. だから, I_1^d は存在し, z_0

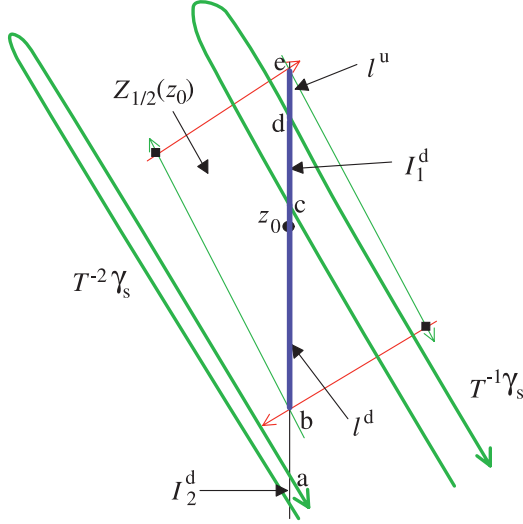


図 2 : $S_G^+(0)$ 内の区間 I_1^d, I_2^d , および l^u の定義. $l_{1/2}(0) = [b, e]_{S_G^+(0)} = I_1^d \cup I_2^d \cup l^u$.

より上にある. 図 2 を参照のこと.

$S_G^+(0)$ 上にいくつか区間を定義しよう. そのために, いくつか点を導入する. **a** を I_2^d の上端点, **b** を $Z_{1/2}(z_0) \cap S_G^+(0)$ の下端点, **c** を I_1^d の下端点, **d** を I_1^d の上端点, そして **e** を $Z_{1/2}(z_0) \cap S_G^+(0)$ の上端点とする. **c** と **d** が一意に決まることは確認できる. このとき, $l_{1/2}(0) = [b, e]_{S_G^+(0)}$ および $I_1^d = [c, d]_{S_G^+(0)}$ は A.9 節で導入した区間である. ほかに 2 つの区間を $l^d = [b, c]_{S_G^+(0)}$ および $l^u = [d, e]_{S_G^+(0)}$ とおく. 定義より, $l_{1/2}(0) = l^d \cup I_1^d \cup l^u$ である $A = T^2 a$, $B = T^2 b$, $C = T^2 c$, $D = T^2 d$, および $E = T^2 e$ とおく.

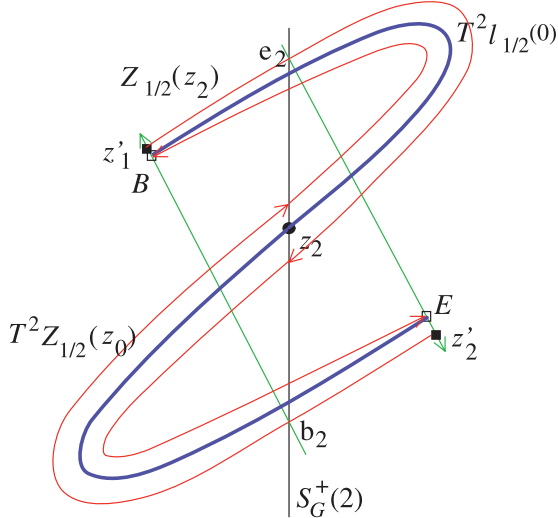


図 3 : $T^2 Z_{1/2}(z_0)$ と $Z_{1/2}(z_2)$ の関係. $T^2 l_{1/2}(0)$ (太い弧) は $T^2 Z_{1/2}(z_0)$ 内にある.

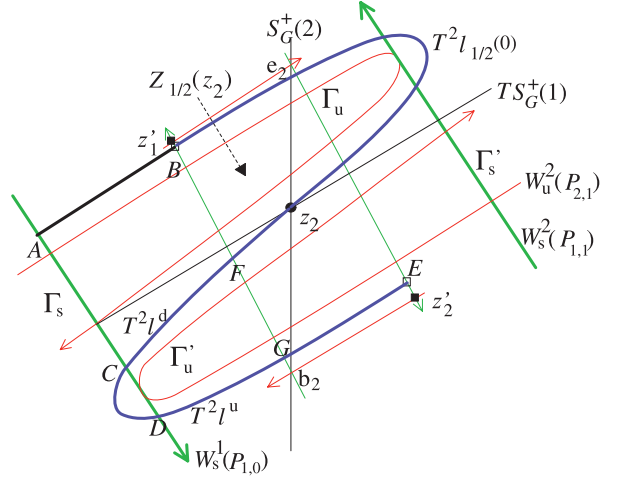


図 4 : $T^2 l_{1/2}(0)$, Γ_u , および Γ'_u の関係.

$l_{1/2}(0)$ に写像を施したときの像の振る舞いを知りたい. とくに, 像と他の対称軸との交点について知りたい. そのために, $T^2 Z_{1/2}(z_0)$ と $Z_{1/2}(z_2)$ の間の一般的関係について考察する. この 2 つの領域は共通面積を持つ. なぜなら, $z_2 = T^2 z_0$ だからである. 加えて, この 2 つの領域は, $Z_{1/2}(z_2)$ の頂点 z'_1 と z'_2 を共通点とする. なぜなら, $z'_1 = T^2 z'_{-1}$ かつ $z'_2 = T^2 z'_0$ だからである. ただし, z'_{-1} と z'_0 は $Z_{1/2}(z_0)$ の頂点である. 弧 $[z'_{-1}, e]_{W_u(z'_{-1})}$ は z'_{-1} の不安定多様体の弧である. だから $T^2 [z'_{-1}, e]_{W_u(z'_{-1})}$ は弧 $[z'_1, e_2]_{W_u(z'_1)}$ の点 e_2 を越えて伸びているここで, e_2 は $Z_{1/2}(z_2)$ の上側頂点である. e は z'_0 の安定多様体上にもあるから, 点 $E = T^2 e$ は $[e_2, z'_2]_{W_s(z'_2)}$ 上にあり, z'_2 に近い. だから, 完全な弧 $T^2 [z'_{-1}, e]_{W_u(z'_{-1})}$ を得るには, e_2 と E をどうにかしてつなぐ必要がある.

$[e_2, E]_{W_u(z'_1)}$ の振る舞いは, $\Gamma_u \subset W_u^1(P_{0,0})$ と $\Gamma'_u \subset W_u^2(P_{2,1})$ によって制限される. すでに指摘した通り, Γ_u は $Z_{1/2}(z_2)$ を 3 つに分割する. 換言すれば, 折り畳まれた弧として, Γ_u は, 2 つの足を $W_s^1(P_{1,0})$ に置いたまま伸びて, $Z_{1/2}(z_2)$ を左下から右上に向かって貫く. 同様に, Γ'_u は 2 つの足を $W_s^2(P_{1,1})$ にのせたまま, 右上から左下に向かって $Z_{1/2}(z_2)$ を貫く. Γ_u と Γ'_u は, 併せて $Z_{1/2}(z_2)$ を 5 つの互いに交わらない領域に分ける. そのうちの 2 つはホモクリニックローブ $U_{0,0}^0$ と $R_{2\pi, \pi} U_{0,0}^0$ の一部である. これらは, 上から数えて 2 番めと 4 番めの成分である. 弧 $[e_2, E]_{W_u}$ はこれらの中には点を持たない.

さて, Γ_u にも Γ'_u にも触れずに e_2 を E につなぐねばならない. E は 5 番めの成分にいる. そうで

ないとする、 $T^2 Z_{1/2}(z_0)$ が2番めと4番めの成分を含むというような矛盾を導くことができる。弧は $Z_{1/2}(z_2)$ の3番めの成分を通る必要がある。すると、 $T^2[z'_{-1}, \mathbf{e}]_{W_0(z'_{-1})} = [z'_1, \mathbf{E}]_{W_0(z'_1)}$ は‘Z’字形になる(図3)。対応して、 $T^2[z'_0, \mathbf{b}]_{W_0(z'_0)} = R_{2\pi, \pi} T^2[z'_{-1}, \mathbf{e}]_{W_0(z'_{-1})}$ は、図3に示すように同じ形を持つ。すると、 $T^2 Z_{1/2}(z_0)$ は厚みを持ったZ形になる。最後に、 $T^2 l_{1/2}(0)$ は $T^2 Z_{1/2}(z_0)$ に留まり、 B と E を結ぶ。ゆえにこれも同様の形を持つ。加えて、 $z_2 = T^2 z_0$ がその上にある。

構築法から明らかに、弧 $[B, E]$ ($= T^2 l_{1/2}(0)$)は Γ_u とも Γ'_u とも交わらない。 Γ_u と Γ'_u を避けて、安定多様体 $W_s^1(P_{1,0})$ と $C = T^2 \mathbf{c}$ および $D = T^2 \mathbf{d}$ で交わる。弧 $[B, C]$ ($= T^2 l^d$)は $TS_G^+(1)$ と z_2 で交わり、 $[z'_1, \mathbf{b}_2]_{S_G^+(2)}$ と第三成分の点 F で交わる。ただし、 $\mathbf{b}_2$ は $Z_{1/2}(z_2)$ の最下段の頂点である。一方、弧 $[D, E]$ ($= T^2 l^u$)は $[z'_1, \mathbf{b}_2]_{W_0(z'_1)}$ と第五成分の点 G で交わる(図4参照)。以上で、 $T^2 l_{1/2}(0)$ の必要な振る舞いがわかった。

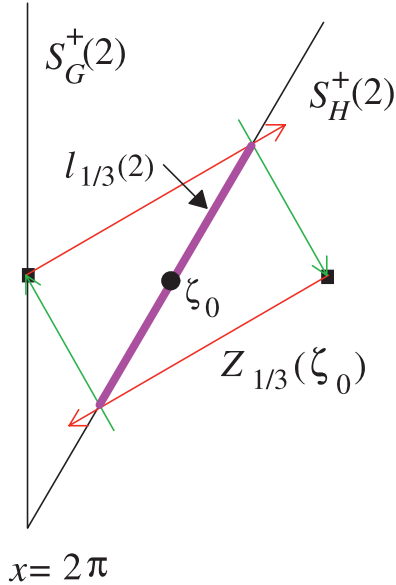


図5： $Z_{1/3}(\zeta_0)$ の構造，および $S_H^+(2)$ 内の $l_{1/3}(2)$ の定義。

次に、 $1/3$ バーコフ楕円軌道 $O(\zeta_0)$ で $\zeta_0 \in S_H^+(2)$ なるものと、 $1/3$ バーコフサドル軌道 $O(\zeta'_0)$ で $\zeta'_0 \in S_G^+(2)$ なるものを考える。共鳴領域 $Z_{1/3}(\zeta_{-1})$ はどちらも Γ_u と Γ'_u によって5つに分割される。というのは、 $\zeta_{-1} \in (\alpha', \gamma')_{TS_G^+(1)}$ だからである。したがって、 $Z_{1/3}(\zeta_{-1})$ は $T^2 l_{1/2}(0)$ によって3つに分割される(図6参照)。一方、 $T^{-1} l_{1/3}(2) = T^{-1}[S_H^+(2) \cap Z_{1/3}(\zeta_0)]$ は、 $Z_{1/3}(\zeta_{-1})$ の右上頂点と左下頂点を結ぶ(図6を見よ)。明らかに、 $T^{-1} l_{1/3}(2)$ と $T^2 l_{1/2}(0)$ は2点で交わる。図6において、 $T^2 l_{1/2}(0)$ の2つの弧 $[C, F]$ と $[D, G]$ のそれぞれは $T^{-1} l_{1/3}(2)$ と交わる。

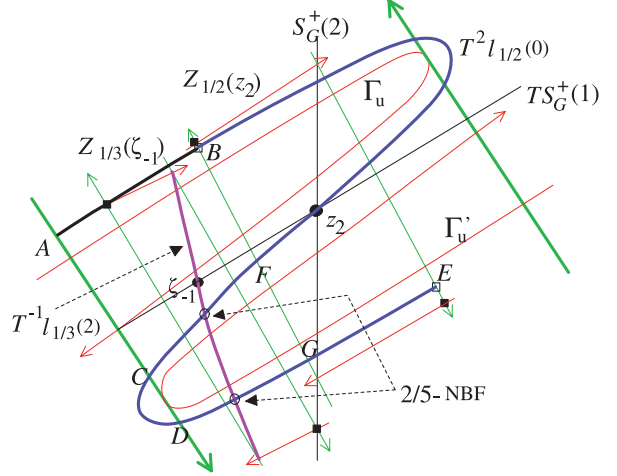


図6： $Z_{1/2}(z_2)$ と $Z_{1/3}(\zeta_{-1})$ の関係。 $Z_{1/3}(\zeta_{-1})$ の中空白は $T^2 l_{1/2}(0)$ と $T^{-1} l_{1/3}(2)$ の交点であり、 $2/5$ -NBFの軌道点である。

残ったのは、各交差点の軌道が望む軌道であること示すことである。図6の白抜き円で示した2つの点はサドル・ノード分岐で現われる。片方がNBなら、もう一方もNBである。上の点は非単調領域 D_2 に位置する。だから、これらの軌道はNBである。回転数は、定義A.1.1(i)より $2/5$ である。 η_i ($i=0, 1, 2, 3, 4$)はこれらの $2/5$ -NBのうちのひとつの軌道点であって、 $\eta_0 \in Z_{1/2}(z_0)$ なるものとする。このとき、 η_i は $i=0, 1$ のときは $Z_{1/2}(z_i)$ 内にあり、 $i=2, 3$ のときは $Z_{1/3}(\zeta_{i-3})$ 内にある。 $S_H(2)$ に関する対称性より、 η_4 は $Z_{1/3}(\zeta_1)$ 内にある。したがって、この $2/5$ -NBはファレー型である。(Q.E.D.)

注意2.1.1. $2/5$ -NBFの存在を、 $Z_{1/3}(\zeta_0)$ ($\zeta_0 \in S_H^+(0)$)と $l_{1/3}(0) = S_H^+(0) \cap Z_{1/3}(\zeta_0)$ から出発して証明することもできる。この場合、 $2/5$ -NBFの軌道点は $S_G^+(2) \cap Z_{1/2}(z_0)$ ($z_0 \in S_G^+(2)$)内に現われる。このことは一般の p/q -NBFにも当てはまる。

2.1.2 p/q -NBFの存在証明

2.1.1節の手順を踏襲して、 $p/q \in (0, 1/2)$ に対し p/q -NBFの存在を証明しよう。 $p/q \in (1/2, 1)$ の場合の証明は同様なので省略する。

ファレー分割FP $[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ は2つの既約分数 p_1/q_1 と p_2/q_2 を指定する。前節におけると同様、2つの鎖 $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ と $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ を使う。一般の場合、 q_1 と q_2 の偶奇に応じて、証明を3つに分ける。すなわち、 q_1 が奇数で q_2 が偶数の場合； q_1 が偶数で q_2 が奇数の場合；そして q_1 と q_2 がともに

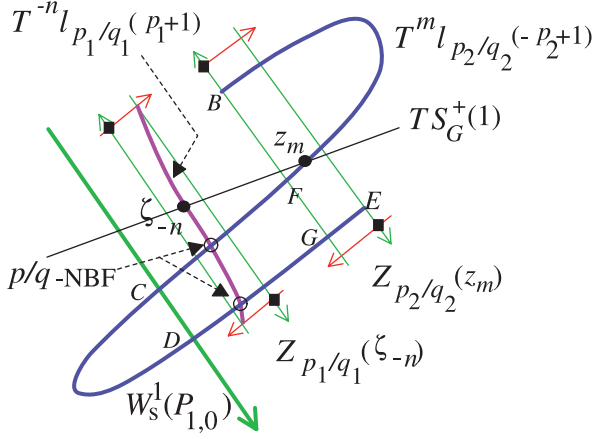


図7: $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-n})$ 内の2つの中黒四角は p/q -NBFの軌道点であり, $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-n})$ 内の中黒円の ζ_{-n} は p_1/q_1 バークフ楕円軌道の点であり, $Z_{p_2/q_2}(z_m)$ 内の中黒円で示された z_m は p_2/q_2 バークフ楕円軌道の点である.

奇数の場合である. 正確に述べると以下のようになる.

- 場合i) $q_1=2n+1$ かつ $q_2=2m-2$;
- 場合ii) $q_1=2n+2$ かつ $q_2=2m-1$;そして
- 場合iii) $q_1=2n+1$ かつ $q_2=2m-1$.

残りの場合は同様に扱えるので, 場合 i) を考察する.

p_2/q_2 バークフ楕円点 z_0 を $S_G(-p_2+1)$ 上にとる. 前節と同様, p_2/q_2 -BS, $O(z'_0)$, を $\pi_x(z'_0) < \pi_x(z_0) < \pi_x(z'_0)$ となるように取り, 鎖 $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ を構築する. 今回使用する $l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ は図2の $l_{1/2}(0)$ に似ている. $\mathbf{b}$ と $\mathbf{e}$ なる記号を弧 $l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ に借用し, $B = T^m \mathbf{b}$ および $E = T^m \mathbf{e}$ とおく. $\mathbf{b}$ と $\mathbf{e}$ は安定多様体上にあるから, これらの像 B と E はそれぞれの周期点に近づく. $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ は B と E を結ぶ弧である. 点 B , E , および $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ の主要部分はすべて「出会いの場」にいる. 前副節と同様の論拠により, 弧は「Z」形であって, 図7に示されるように Γ_u と Γ'_u を避ける. 弧 $[B, E] (= T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1))$ と $TS_G^+(1)$ は z_m で交わる.

さて, p_1/q_1 バークフ楕円点 ζ_0 を $S_H^+(p_1+1)$ 上にとる. 対称軸の弧 $l_{p_1/q_1}(p_1+1)$ の逆像 $T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1+1)$ は $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-n})$ 内にある. つまり「出会いの場」にある. $TS_G^+(1)$ と $T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1+1)$ は ζ_{-n} で交わる. $a = a^*$ (図45参照) の状況において, 弧 $[B, E]$ と $W_s^1(P_{1,0})$ は2点, たとえば C と D で交わる (図7参照). したがって, 交点 $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1) \cap T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1+1)$ は $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-n})$ 内にある (図23の中黒円). これらは非バークフ軌道の点である. その回転数を p/q とする

と, $q=2(m+n)-1=q_1+q_2$ であり, 一周期 q の間に $2\pi(p_1+p_2)$ 動くから $p=p_1+p_2$ である.

$O(\eta_0)$ は $\eta_0 \in S_G(-p_2+1)$ なる上記 p/q -NB のひとつとする. 上に述べたことから, 各点 $\eta_i (i=0, \dots, q_2/2)$ は $Z_{p_2/q_2}(z_i)$ 内にあり, 各点 $\eta_i (i=q_2/2+1, \dots, q_2/2+(q_1+1)/2)$ は, $j=-n, \dots, 0$ として $Z_{p_1/q_1}(\zeta_j)$ 内にある. $S_G(-p_2+1)$ に関する対称性より, この p/q -NB の各点 $\eta_i (i=-q_2/2+1, \dots, -1)$ は $Z_{p_2/q_2}(z_i)$ 内にある. $S_H(p_1+1)$ に関する対称性より, 各点 $\eta_i (i=q_2/2+(q_1+3)/2, \dots, q_2/2+q_1)$ は $Z_{p_1/q_1}(\zeta_j)$ 内にある. したがって, 円筒に射影された軌道は鎖 $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ の各共鳴領域に一点ずつ, 鎖 $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ の共鳴領域に一点ずつ持つ. こうして p/q -NBF のための条件が満たされた. (Q.E.D.)

2.1.3 $p \neq 1$ および $p \neq q-1$ の場合の定理1(ii)の証明

$FP[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ と書く. p_l/q_l を p/q の左娘, p_r/q_r を右娘とする. 定義より, $p_l = p+p_1$, $q_l = q+q_1$, $p_r = p+p_2$, および $q_r = q+q_2$ が成り立つ. 以下で, p/q -NBF の存在を仮定して, p_l/q_l -NBF と p_r/q_r -NBF の存在を証明する.

証明は3つの場合に分かれる.

場合1) q_1 が奇数で q_2 が偶数.

p_2/q_2 バークフ楕円点 $z_0 \in S_G(-p_2+1)$ と p_1/q_1 バークフ楕円点 $\zeta_0 \in S_H(p_1+1)$ を取る. $TS_G(1)$ に沿って, 回転数 p_1/q_1 , p/q , および p_2/q_2 のバークフ楕円点, この順に x 座標の増加する方向に並ぶ. これらの点の共鳴領域は細長い四辺形をしており, 長辺をほぼ平行に, 長辺が $TS_G(1)$ にほぼ直角になるように並ぶ. 図1参照. p/q -NBF が存在するという前提より, 以下の関係が成り立つ.

$$T^{q_2/2+1} l_{p_2/q_2}(-p_2+1) \cap T^{-(q_1-1)/2} l_{p_1/q_1}(p_1+1) \neq \emptyset. \quad (10)$$

すなわち, $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-(q_1-1)/2})$ 内の2つ交点のそれぞれが p/q -NBF の軌道点である.

さて, p/q バークフ楕円点 $\xi_0 \in S_H(p+1)$ を取る. 共鳴領域 $Z_{p/q}(\xi_{-(q-1)/2})$ は「出会いの場」で $Z_{p_1/q_1}(\zeta_{-(q_1-1)/2})$ と $Z_{p_2/q_2}(z_{q_2/2+1})$ の間に挟まれる. だから, $T^{q_2/2+1} l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ は $Z_{p/q}(\xi_{-(q-1)/2})$ を3つに分け, $T^{-(q-1)/2} l_{p/q}(p+1) \subset Z_{p/q}(\xi_{-(q-1)/2})$ と交わる. 交点の軌道は $S_G(-p_2+1)$ を出発して $S_H(p+1)$ に点を持つから, 周期は $2(q_2/2+1+(q-1)/2)-1=q+q_2$ であるとわかる. 一周期 $q+q_2$ に $2(p+p_2)\pi$ だけ動く. だからこの点は p_r/q_r -NBF に属す. つまり, 順序関係 p/q -NBF $\rightarrow p_r/q_r$ -NBF が得られた. 図8は,

$p_1/q_1=1/3$ かつ $p_2/q_2=1/2$ の状況を示す．この図は $2/5\text{-NBF} \rightarrow 3/7\text{-NBF}$ の証明を与えている．

$p/q\text{-NBF}$ が存在するという前提より，関係

$$T^{(q_1+1)/2} l_{p_1/q_1}(-p_1+1) \cap T^{-(q_2/2-1)} l_{p_2/q_2}(p_2+1) \neq \emptyset \quad (11)$$

を得る．ここで p_1/q_1 バーコフ楕円点 $\xi_0 \in S_H(-p_1+1)$ と p_2/q_2 バーコフ楕円点 $z_0 \in S_G(p_2+1)$ を取った．式 (10) と (11) が同等であることに注意しよう．交点の周期は $2((q_1+1)/2 + q_2/2 - 1) + 1 = q_1 + q_2$ である．一周期 $q_1 + q_2$ の間に軌道は $2(p_1 + p_2)\pi$ だけ動く．だから， $Z_{p_2/q_2}(z - q_2/2 + 1)$ 内の各交点は $p/q\text{-NBF}$ の点である． $O(\xi_0)$ は $\xi_0 \in S_H(p+1)$ なる p/q バーコフ楕円軌道であるとする．この状況では， $Z_{p/q}(\xi - (q-1)/2)$ 内の $T^{-(q-1)/2} l_{p/q}(p+1)$ は $T^{(q_1+1)/2} l_{p_1/q_1}(-p_1+1)$ と交わる．各交点の軌道は $S_H(-p_1+1)$ を出発して $S_H(p+1)$ に点を持つ．だから周期は $2((q-1)/2 + (q_1+1)/2) = q + q_1$ である．一周期 $q + q_1$ の間に軌道は $2(p + p_1)\pi$ だけ動く．だから，各交点は $p_1/q_1\text{-NBF}$ の点である．つまり，順序関係 $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_1/q_1\text{-NBF}$ が得られた．図 9 は $p_1/q_1=1/3$ かつ $p_2/q_2=1/2$ の場合を示す．この図は， $2/5\text{-NBF} \rightarrow 3/8\text{-NBF}$ を証明する．

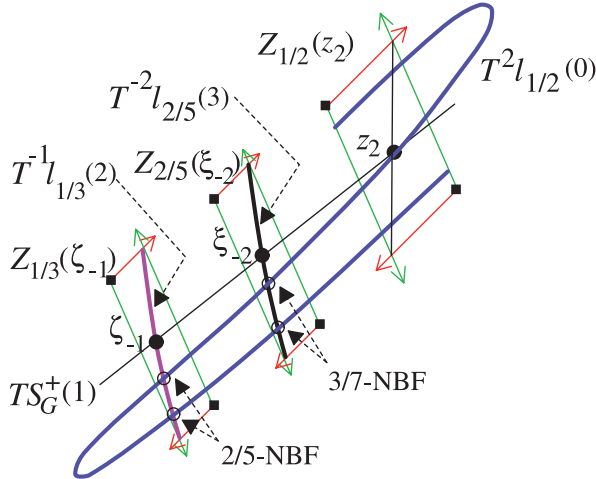


図 8 : 図は ' $2/5\text{-NBF} \rightarrow 3/7\text{-NBF}$ ' を証明する． $2/5\text{-NBF}$ の 2 点 (中空円) は $T^{-1} l_{1/3}(2) \in Z_{1/3}(\xi_{-1})$ 内にある． $Z_{2/5}(\xi_{-2})$ 内の 2 つの中空円は $3/7\text{-NBF}$ の点である．

場合 2) : q_1 が偶数で q_2 が奇数．

関係式

$$T^{(q_2+1)/2} l_{p_2/q_2}(-p_2+1) \cap T^{-(q_1/2-1)} l_{p_1/q_1}(p_1+1) \neq \emptyset$$

より，順序関係 $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_1/q_1\text{-NBF}$ を得る．同様に，関係式

$$T^{q_1/2+1} l_{p_1/q_1}(-p_1+1) \cap T^{-(q_2-1)/2} l_{p_2/q_2}(p_2+1) \neq \emptyset$$

より， $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_1/q_1\text{-NBF}$ を得る．

場合 3) : q_1 も q_2 も奇数．

関係式

$$T^{(q_2+1)/2} l_{p_2/q_2}(-p_2+1) \cap T^{-(q_1-1)/2} l_{p_1/q_1}(p_1+1) \neq \emptyset,$$

および

$$T^{(q_1+1)/2} l_{p_1/q_1}(-p_1+1) \cap T^{-(q_2-1)/2} l_{p_2/q_2}(p_2+1) \neq \emptyset$$

より，それぞれ $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_1/q_1\text{-NBF}$ と $p/q\text{-NBF} \rightarrow p_1/q_1\text{-NBF}$ を得る． (Q.E.D.)

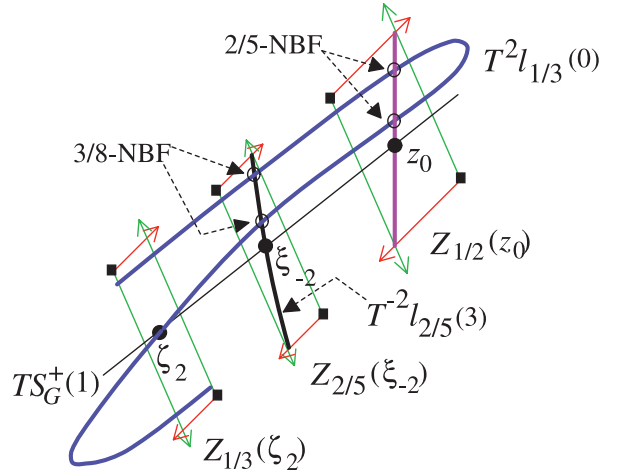


図 9 : 図は ' $2/5\text{-NBF} \rightarrow 3/8\text{-NBF}$ ' を証明する． $2/5\text{-NBF}$ の 2 点 (中空円) は $l_{1/2}(2) \in Z_{1/2}(z_0)$ 内にある． $Z_{2/5}(\xi_{-2})$ 2 つの中空円は $3/8\text{-NBF}$ の点である．

2.2 $p=1$ および $p=q-1$ の場合の証明

本副節では， $p=1$ の場合と $p=q-1$ の場合に定理 1 (i) と 1 (ii) を証明する．

2.2.2 節では，順序関係 $1/q\text{-NBF} \rightarrow 1/(q+1)\text{-NBF}$ ($q \geq 2$) を証明する．命題 A.1.2 (ii) を使って，順序関係 $(q-1)/q\text{-NBF} \rightarrow q/(q+1)\text{-NBF}$ ($q \geq 2$) が得られる．2.2.3 節では，順序関係 $1/q\text{-NBF} \rightarrow 2/(2q-1)\text{-NBF}$ ($q \geq 3$) を証明する．命題 A.1.2 (ii) を使って，順序関係 $(q-1)/q\text{-NBF} \rightarrow (2q-3)/(2q-1)\text{-NBF}$ ($q \geq 3$) が得られる．

順序関係 $1/q\text{-NBF} \rightarrow 1/(q+1)\text{-NBF}$ ($q \geq 2$) 文献 [7] と [8] でも得られた．2.2.2 節では，記述の完全性を期すために短い証明を入れた．

2.2.1 いくつかの関係

数種類の区間を導入しよう． $k \geq 1$ に対して， $l_{1/(2k)}(0) = S_G^+(0) \cap \langle Z_{1/(2k)} \rangle$ と定義する． $k \geq 0$ に対して， $l_{1/(2k+1)}(0) = S_H^+(0) \cap \langle Z_{1/(2k+1)} \rangle$ と定義する．

以下の関係はほとんど自明である．

$$I_k^d \subset l_{1/(2k)}(0) \quad (k \geq 1),$$

$$I_k^u = R_0, \pi I_k^d \subset l_{(2k-1)/(2k)}(0) \quad (k \geq 1),$$

$$J_k^d \subset l_{1/(2k+1)}(0) \quad (k \geq 0),$$

$$J_k^d = R_{\pi, \pi} J_k^d \subset l_{(2k)/(2k+1)}(0) \quad (k \geq 0). \quad (12)$$

上の関係式に関して解説しておく． γ_s と $S_H^+(0)$ が交差する状況を考える．交差点は $Z_{1/1}(Q_{0,1})$ にある．なぜなら， γ_s は $\pi < x < 2\pi$ 内にあり， $y=2x$ は $Z_{1/1}(Q_{0,1})$ を通るからである．このことから，関係式 $J_0^d \subset l_{1/1}(0) [= S_H(0) \cap \langle Z_{1/1} \rangle]$ が成り立つ．

γ_s はすべての $Z_{p/q}(\alpha_{p/q})$ ($0 < p/q < 1$) を通る．ただし， $\alpha_{p/q}$ は p/q -バーコフ楕円軌道の点であって $S_G^+(1)$ 上にあるものである．このとき，関係式 $J_k^d \subset l_{1/(2k)}(0)$ ($k \geq 1$) および $J_k^d \subset l_{1/(2k+1)}(0)$ ($k \geq 1$) が得られる．他の関係式は回転対称性を使って得られる．

2.2.2 ‘ $1/q$ -NBF $\rightarrow 1/(q+1)$ -NBF ($q \geq 2$)’ の証明

γ_s は， $y = -a \sin x$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$) のグラフより上にある． $y = -a \sin x$ ($\pi \leq x \leq 2\pi$) のグラフは $S_H^+(0)$ と $a \geq 3\pi$ のときに交わっている．その状況では， γ_s も $S_H^+(0)$ と交わる．このことから， J_0^d が $Z_{1/1}(Q_{0,1})$ 内にあることが言える．図10(a)には， J_0^d が $V_{0,0}$ 内に描かれている．この場合， $T^{-1}J_0^d$ は $x < 0$ にいる， I_1^d は存在するし I_k^d ($k \geq 2$) も存在する．関係式 $I_k^d \rightarrow J_k^d$ ($k \geq 1$) が成り立つことに注意しよう． I_k^d, J_k^d ，および I_{k+1}^d の像も図10(a)に描いた． T の下での4つの区間の像を図10(b)に示した． TJ_0^d が $S_H^-(1)$ と交わるなら，交点は $1/2$ -NBF の点である．実際，初期点 ζ_0 は $Z_{1/1}(Q_{0,1})$ 内にあり， ζ_1 は $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ 内にある．だから，NBF の条件を満たす．

TJ_0^d が $S_H^-(1)$ と交わるなら， $T^{k+1}I_k^d$ も $S_H^-(1)$ と交わる． $k=1$ において， $1/3$ -NB の存在が得られる．2.2.1節で述べた性質より，これはNBF の条件を満たす．したがって， $1/2$ -NBF $\rightarrow 1/3$ -NBF が導かれた． $T^2J_1^d$ が $S_H^-(1)$ と交わるなら， $T^2J_1^d$ も $S_H^-(1)$ と交わる．このことから関係 $1/3$ -NBF $\rightarrow 1/4$ -NBF が出る． $T^2J_1^d$ が $S_H^-(1)$ と交わるなら， $T^3J_2^d$ も $S_H^-(1)$ と交わる．このことから関係 $1/4$ -NBF $\rightarrow 1/5$ -NBF が出る．この手続きを続けて，関係 $1/q$ -NBF $\rightarrow 1/(q+1)$ -NBF ($q \geq 2$) を得る． (Q.E.D.)

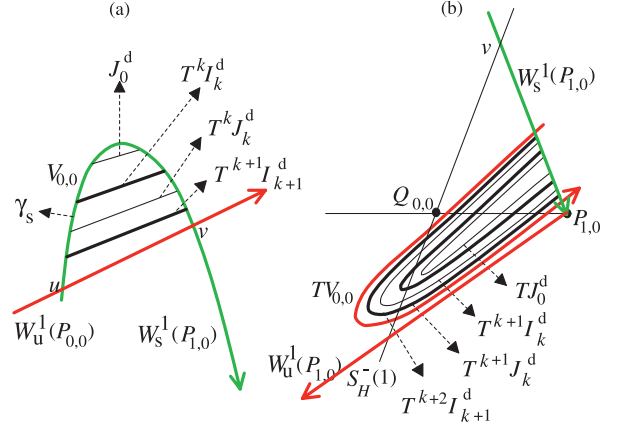


図10： (a) ホモクリニックローブ $V_{0,0}$ 内の $J_0^d, T^k I_k^d, T^k J_k^d$ ，および $T^{k+1} I_{k+1}^d$ の相対配置． (b) $TV_{0,0}$ 内の $TJ_0^d, T^{k+1} I_k^d, T^{k+1} J_k^d$ ，および $T^{k+2} I_{k+1}^d$ の相対配置．

2.2.3 ‘ $1/q$ -NBF $\rightarrow 2/(2q-1)$ -NBF ($q \geq 3$)’ の証明

$Z_{0/1}(Q_{0,0})$ と $Z_{1/(q-1)}(z_k)$ の相対位置を図11に示した．図に，弧 $T^k l_{1/(q-1)}(0)$ を太線で示した． $q=(2k-1)$ が奇数の場合を考えよう．弧 $T^k l_{1/(q-1)}(0)$ と $S_H^-(1)$ が交差すると，その交点は $1/q$ -NBF の軌道点である．弧 $T^k l_{1/(q-1)}(0)$ は， $Z_{1/(q-1)}(z_k)$ と $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ に挟まれる $Z_{1/q}(\zeta_{-k'})$ を貫く．このことから $T^k l_{1/(q-1)}(0)$ が $T^{-k} l_{1/q}(2)$ ($k'=(q-1)/2$) と交わる可以说える．交点は $2/(2q-1)$ -NBF の軌道点である．事実，初期点 η_0 は $S_G^+(0)$ 内にあり， $\eta_{k+k'}$ は $S_H^+(2)$ 内にある．周期は $2((q+1)/2 + (q-1)/2) - 1 = 2q-1$ である．軌道は一周期 $2q-1$ の間に 4π だけ動く．2.1.2節の議論を使って，この軌道がNBF の条件を満たすことを確認できる．

q が偶数の場合， $k=q/2$ および $k'=q/2-1$ が成り立つ．周期が $2(k+k')+1=2q-1$ であること，また回

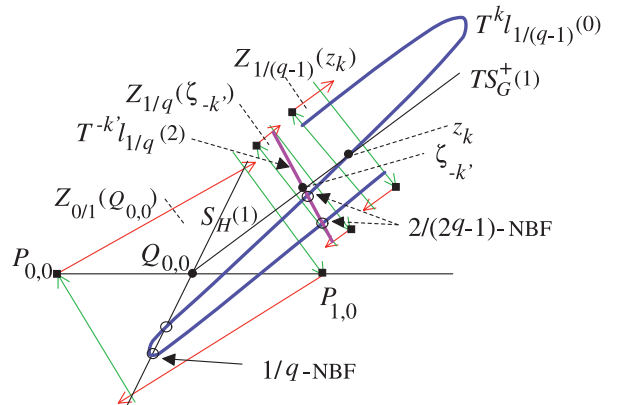


図11： ‘ $1/q$ -NBF $\rightarrow 2/(2q-1)$ -NBF’ を証明するための模式図．

転数が $2/(2q-1)$ であることを得る．詳細は略す．

(Q.E.D.)

注意 2.2.

1 階の $1/2$ -NBF が存在するなら， $n(\geq 2)$ 階の NBF がすべて存在する．標準写像には，臨界パラメータ値 $a_c(1/2\text{-NBF})=11.88\cdots$ がある．

2.3 定理 1 (iii) の証明

まず，証明の手順を述べておこう．2.3.1 節では，区間 I_1^d (図 2 参照) が存在するのは $1/n$ -NBF ($n \geq 2$) が存在するときであることを証明する．この事実を使って，順序関係 $1/n\text{-NBF} \rightarrow p/q\text{-NBF}$ を 2.3.2 節で証明する．順序関係 $(n-1)/n\text{-NBF} \rightarrow p/q\text{-NBF}$ の証明は同様なので省略する．

2.3.1 I_1^d の存在証明

命題 2.3.1. $1/n$ -NBF ($n \geq 2$) が存在すれば， I_1^d も存在する．

証明. $n=2k-1$ ($k \geq 2$) に対して $1/n$ -NBF が存在するとする． n が偶数のとき，証明は同様なので，証明は省略する．

$1/n$ -NBF の点 z_0 を $l_{1/(n-1)}(0) \subset S_G^+(0)$ 内に取ることができる． $O(z_0)$ が対称軌道であって回転数が $1/(2k-1)$ であるのだから，点 z_{k-1} は $V_{0,0}^u$ 内にあり， z_k は $S_H^-(1)$ 上にあり， z_{k+1} は $U_{0,0}^u$ 内にある．これが可能なのは $a > 4$ のときのみである．というのは， $0 < a \leq 4$ のとき， $S_H^-(1)$ は写像 T の下で， $Q_{0,0}$ のまわりに時計方向に 180 度未満しか回転せず，関係 $TS_H^-(1) \cap S_H^+(1) = \emptyset$ が成立つからである．

一方， I_1^d が現われる臨界パラメータ値は 4 より小さいことを示そう．いま， $0 < t < \pi$ として， $s_0=(t,0)$ ， $s_1=Ts_0=(\pi/2, f(t))$ ， $s_2=T^2s_0=(2\pi, f(t)+a)$ なる 3 点が存在するための a の条件を求めよう．このような 3 点が存在すると， I_1^d が存在する．実際， $s_0 \in Z_{0/1}(Q_{0,0})$ と $s_2 \notin Z_{0/1}(Q_{0,0})$ はほぼ自明に成り立つ．だから， $s_2 \in U_{0,0}^u$ が得られる．つまり $\Gamma_u \cap S_G^+(2) \neq \emptyset$ である．だから $T^{-1}V_{0,0}^u \cap S_G^+(0) \neq \emptyset$ である．すなわち， I_1^d が存在する．

s_0 ， s_1 ，および s_2 の位置情報を使って，以下の方程式を得る．

$$t+f(t)=\pi/2 \text{ および } a+f(t)=3\pi/2. \quad (13)$$

この式から， a を決めるための式が得られる：

$$F(a)=a-a\sin a-3\pi/2=0. \quad (14)$$

$$F(\pi)=-\pi/2 < 0 \text{ および } F(5\pi/4)=(\pi/8)(5\sqrt{2}-2) > 0 \text{ で}$$

あるから， $\pi < a < 5\pi/4$ のときに解が存在する．

(Q.E.D.)

2.3.2 ‘ $1/n$ -NBF $\rightarrow p/q$ -NBF’ の証明

命題 2.3.1 より，区間 I_1^d は， $1/n$ -NBF ($n \geq 2$) が存在する状況では存在する． I_1^d が存在することを証明すれば十分である．そのとき $k \geq 3$ に対して $2/(2k-1)$ -NBF が存在するからである．定理 1 (ii) より， $2/(2k-1)$ -NBF が存在すれば，その子孫はすべて存在する．したがって，関係 $1/n\text{-NBF} \rightarrow p/q\text{-NBF}$ が得られる．

n が奇数の場合を証明する． n が偶数の場合の証明は同様なので省略する． I_1^d が存在すると，簡単にわかるように， Γ_u は $S_G^+(2)$ と交わる．このことから $T^{(k+1)/2}l_{1/k}(0)$ が $S_G^+(2)$ と交わることが言える．よって $T^{(k+1)/2}l_{1/k}(0)$ は $Z_{1/(k-1)}(z_{-(k-3)/2})$ を貫く．なぜなら， $Z_{1/(k-1)}(z_{-(k-3)/2})$ は $Z_{1/k}(\zeta_{(k+1)/2})$ より上にあり， $\langle Z_{1/2}(z) \rangle$ より下にあるからである． $Z_{1/(k-1)}(z_{-(k-3)/2})$ 内で， $T^{(k+1)/2}l_{1/k}(0)$ と $T^{-(k-3)/2}l_{1/(k-1)}(2)$ は互いに交わる． $l_{1/k}(0) \subset S_H^+(0)$ と $l_{1/(k-1)}(2) \subset S_G^+(2)$ より，周期は $2((k+1)/2 + (k-3)/2) + 1 = 2k-1$ であり，軌道は一周の間に 4π だけ動く．だから，交点は $2/(2k-1)$ -NBF の軌道点である．定理 1 (i) および (ii) の証明より，この軌道は NBF の条件を満たす．

(Q.E.D.)

2.4 定理 1 (iv) の証明

本節では，組みひも型の概念が必要である．周期解 O の組みひも型を $\beta(O)$ と書く． p/q -B の組みひも型は $\beta(p/q\text{-B}) = \rho_q^p$ と書ける．ただし， σ_i を生成子として， $\rho_q = \sigma_{q-1}\sigma_{q-2}\cdots\sigma_2\sigma_1$ である (組みひもとその応用に関する日本語解説 [13] 参照)． p/q -NB の組みひも型が $\beta(p/q\text{-NB}) = \sigma_1^{-2}\beta(p/q\text{-B})$ と表されるとき，これをボイランド組みひも型と呼ぶ.¹

NBF がボイランド組みひも型を持つことを証明すればよい．文献 [8] の結果より， $1/q$ -NBF の組みひも型は $\sigma_1^{-2}\rho_{1/q}$ である．これはボイランド型である．以下では， $q \geq 3$ かつ $0 < p/q < 1/2$ として， p/q -NBF の組みひもを考察する．

2 つの p/q -NBF， $O(\eta_0)$ および $O(\eta'_0)$ の $\eta_{k'}$ から $\eta_{k'+1}$ への一步と η_k から η_{k+1} への一步を比べてみる (図 13 参照)．

¹ 文献 [1] の図 9.3 より，組みひも型は $\beta(p/q\text{-NB}) = \sigma_1^2\beta(p/q\text{-B})$ によって得られる． $2/5$ -NBF の場合， $\sigma_1^{-2}\beta(p/q\text{-B})$ も $\sigma_1^2\beta(p/q\text{-B})$ も $\lambda_{\max} = 1.722$ を与える．しかし， $1/6$ -NBF の場合， $\sigma_1^{-2}\beta(p/q\text{-B})$ は $\lambda_{\max} = 2.081$ を与え， $\sigma_1^2\beta(p/q\text{-B})$ は $\lambda_{\max} = 1.883$ を与える．線路法を使って上記固有値を計算した．ボイランド公式 (15) は前者の結果を与える．

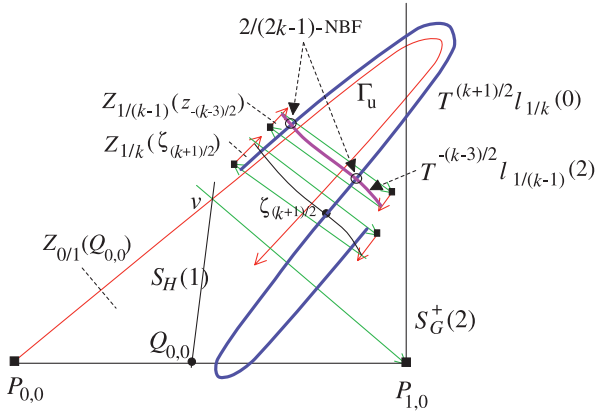


図12: I_1^d が存在するので, Γ_u は $S_G^+(2)$ と交わる. よって, $T^{(k+1)/2} l_{1/k}(0)$ と $T^{-(k-3)/2} l_{1/(k-1)}(2)$ は $Z_{1/(k-1)}(z_{-(k-3)/2})$ 内で交わる.

$\eta_{k'}$ から η_{k+1} への一步は η_k から η_{k+1} への一步より幅広く, 後者の一步を含む. 加えて, y 座標は前者の一步では増加し, 後者では減少する. 図において, η_k と η_{k+1} を結ぶ太い矢印は, $\eta_{k'}$ と η_{k+1} を結ぶ太い矢印と交わり, $\langle Z_{p/q} \rangle$ 内の2つのパーコフ周期点を結ぶ細い矢印とも交わる. 関係式 $\pi_y(\eta_k) > \pi_y(\eta_{k+1})$ と $\pi_y(\eta_{k'}) < \pi_y(\eta_{k+1})$ より, η_k が $\pi < x < 2\pi$ にあって $f(\pi_x(\eta_k)) < 0$ を満たし, $\eta_{k'}$ が $0 < x < \pi$ にあって $f(\pi_x(\eta_{k'})) > 0$ を満たす. $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ から $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ への, NBFの点の跳び上がりは一周の間に1回だけ生じる. 同じことは, $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ から $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ への飛び降りについても言える.

2/5-NBFからの組みひもの構築法を説明する. まず, 普遍被覆上で組みひもを描く (図14の左パネル参照). この図で, η_1 から η_2 への紐は飛び降りを表わし, η_4 から η_5 への紐は跳び上がりを表す. 生成子 σ_3^{-1} は, 軌道交差または紐の交差を表現する. η_1 は $x=\pi$ の右にあり, η_4 は $x=\pi$ の左にあるので, η_0 から η_1 への一步は, η_3 から η_4 への一步より広く, それを含んでしまう. 生成子 σ_1^{-1} はこれらの紐が交差することを表現する. 著者らの目的は位相エントロピーの下界を計算することであるから, 単純な方の組みひもを考察してよい. p/q -NBF の $\langle Z_{p/q} \rangle$ 内の運動は, ほぼ p/q -B の運動と同じである. よって, $\langle Z_{p/q} \rangle$ 内の運動は回転数 p/q の剛体回転と仮定してしまおう. この仮定から, 残りの紐の動きは決まってしまう. 上に述べた η_1 と η_4 の相対位置関係から, 円筒上で η_1 と η_4 が重なることを避けることができる. すべての紐を円筒上に射影して, 図14の右パネルの組みひもが得られる. こうして, $\sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \rho_3^2 (\sim \sigma_1^{-2} \rho_3^2)$ が得

られる. 事実, η_0 から η_1 への紐の間に η_3 から η_4 への紐があり, η_1 から η_2 への紐の間に η_4 から η_0 への紐がある. このことは, η_0 と η_1 の間に2つの点があることから出る. ここで, η_3 と η_4 は $\langle Z_{1/3} \rangle$ 内にある.

一般の p/q -NBF の場合を考察しよう. η_{k-1} と η_k の間に, p_2-1 個の点が $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ 内にあり, p_1+1 個の点が $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ 内にある. このことは, ファーレイ分割 $FP[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ に関する性質からすると, 不等式 $1/q_i > p_2/q_2 - p_1/q_1, i=1, 2$ が成り立つことから言える. だから, $\sigma_j^{-1} \sigma_{j+p}^{-1}$ が成り立つ. ただし, $p (=p_1+p_2)$ 個の点が η_{k-1} と η_k の間に存在する. 組みひもの残りの部分は ρ_q^p と表される. 最後に, p/q -NBFの組みひも型として $\sigma_j^{-1} \sigma_{j+p}^{-1} \rho_q^p (1 \leq j \leq q-p-1) (\sim \sigma_1^{-2} \rho_q^p)$ を得る.

(Q.E.D.)

$\beta(p/q\text{-NBF}) (0 < p/q < 1/2)$ に対しては, 位相エントロピーの下界 $h_{\text{top}}^B = \ln \lambda_{\text{max}}$ が計算できる. ここで, λ_{max} はボイランド公式

$$(\lambda^{q_1} - 2)(\lambda^{q_2} - 2) = 3 \quad (15)$$

の最大根である.

p/q -NBFから得られるエントロピーは $(q-p)/q$ -NBFから得られるものと同じである. というのは, $FP[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ が成り立つときには $FP[(q-p)/q] = \{(q_2-p_2)/q_2, (q_1-p_1)/q_1\}$ も成り立つからである.

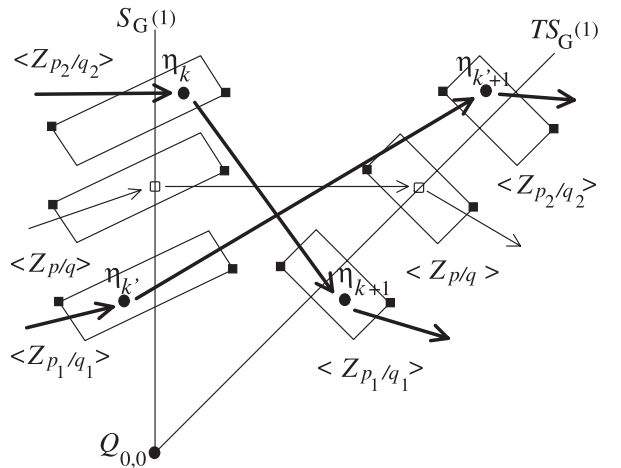


図13: 普遍被覆上に持ち上げられた p/q -NBF ($p/q = p_1/q_1 \oplus p_2/q_2$) の2つの軌道を示す. $\dots \Rightarrow \eta_k \Rightarrow \eta_{k+1} \Rightarrow \dots$ と $\dots \Rightarrow \eta_{k'} \Rightarrow \eta_{k'+1} \Rightarrow \dots$ である. 円筒上ではこの2つは一致する. $\langle Z_{p/q} \rangle$ 内の軌道は p/q パーコフ楕円軌道であり, 細い矢印で示した.

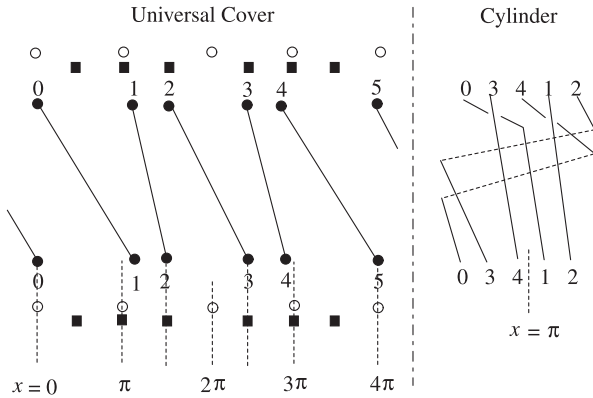


図14：普遍被覆上および円筒上での2/5-NBFの組みひも。軌道1/2-Bは中黒円で、1/3-Bは中黒四角で描いた。記号 i は η_i のことである。

2.5 考察

本節では、定理1とボイランド [1] の証明した定理（以下の定理C）の関係について議論し、NBFの物理的意味を考える。

2つの組みひも型の間の半順序を記号 $\succeq$ で表す。 $\beta(p/q\text{-NB}) \succeq \beta(p'/q'\text{-NB})$ と書き、「 $\beta(p/q\text{-NB})$ は $\beta(p'/q'\text{-NB})$ に優先する」と読む。意味は、考察の対象となっている力学系において、 $\beta(p/q\text{-NB})$ があれば、 $\beta(p'/q'\text{-NB})$ もあるということである。

定理 C (ボイランド). p/q も p'/q' も既約分数であって $0 < p/q, p'/q' < 1$ を満たすとする。 $\beta(p/q\text{-NB})$ と $\beta(p'/q'\text{-NB})$ をボイランド組みひも型とする。このとき、 $\beta(p/q\text{-NB}) \succeq \beta(p'/q'\text{-NB})$ であるための必要十分条件は $\text{FI}[p/q] \supset \text{FI}[p'/q']$ である。

定理1と定理Cには3つの型の関係が出てくる。第一は2つの非バーコフ周期軌道の間の力学順序関係であり、第二はファレー区間同士の包含関係であり、第三は非バーコフ周期軌道の組みひも型の間の強制関係である。定理1(ii)では、ファレー区間を伴うNBF同士の間の力学順序関係が導かれた。定理Cは、2つの組みひも型の強制関係と2つのNBのファレー区間の関係の間の関係を与える。すべてのNBFに対して、力学順序関係と組みひも型が与えられたならパラメータを変えたときの複雑さの進化がもっと明瞭に記述できるであろう。いまのところ、これは実現していない。

定理Cにおいて、 $\text{FI}[p/q]$ の2つの分数 p_1/q_1 および p_2/q_2 は $p/q\text{-NB}$ の最小および最大の局所的回転率を表す。定理1において、この値を使って共

鳴領域を指定する。 $p/q\text{-NBF}$ の y 方向の運動の幅は2つの共鳴鎖 $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ と $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ の y 距離によって測ることができる。この幅は $p/q\text{-NBF}$ の娘である $p_1/q_1\text{-NBF}$ や $p_2/q_2\text{-NBF}$ から決まる幅より広い。

次に、NBFの運動とバーコフ軌道の運動を比較する。図6の2つの交点（中空円）は、太い‘Z’型弧上、 z_2 と E の間にある。これらに T^{-2} を施すと、その像は、図2で $S_G^+(0)$ 内にあって、 z_0 より上にある。つまり、 $S_G(0)$ において、2/5-NBF は 1/2-B より回転率が高い。上で使った2点に、 T を施すと、図5において、 $l_{1/3}(2)$ 内の ζ_0 より下に写る。つまり、2/5-NBF は $S_H^+(2)$ において 1/3-B より小さな回転率を示す。これらの事実から言えるように、2/5-NBF のオーブリーグラフは 1/2-B や 1/3-B のオーブリーグラフと交わる。この議論を一般化して、 $p/q\text{-NBF}$ のオーブリーグラフが $p_1/q_1\text{-B}$ や $p_2/q_2\text{-B}$ のオーブリーグラフと交わる可以说える。このことは、定義 $\text{FI}[p/q] = [p_1/q_1, p_2/q_2]$ に対応する。

2/5-NBFがボイランド組みひも型 $\sigma_1^{-2} \rho^3$ を持つことは簡単に証明できる。だが、一般の $p/q\text{-NBF}$ の正確な組みひも型を決めることはむずかしい。2.4節で行ったように、 $p/q\text{-NBF}$ の軌道点の運動を少しだけ簡単化すればボイランド組みひも型 $\sigma_1^{-2} \rho_i^q$ が得られる。こうして、定理1(iv)で $p/q\text{-NBF}$ の位相エントロピーの下界を得た。

$p/q\text{-NBF}$ を見つけると、ボイランド公式 (15) を使って位相エントロピーの正の下界が得られる。よって、 $p/q\text{-NBF}$ は複雑性の指標となる。無理数に収束する道の極限では、位相エントロピーの下界はゼロである。一方で、有理数に収束する道の極限では、位相エントロピーの下界はゼロでない正の有限値である。これらのことはボイランド公式から導かれる。定理1と定理C（ボイランド）を結びつけて、力学系の複雑さを以前より少しだけ余分に理解できる。

3 NBFの性質

本節では、回転数 p/q ($0 < p/q < 1$) の対称非バーコフ周期軌道のみを考察する。このような軌道を $p/q\text{-NB}$ と記す。A.5節で 2 共鳴鎖-対称 p/q 非バーコフ周期軌道を定義し、 $p/q\text{-NB2C}$ または $p_1/q_1 \oplus p_2/q_2\text{-NB2C}$ と書いた。またファレー型対称 $p_1/q_1 \oplus p_2/q_2$ -非バーコフ周期軌道を定義し、 $p/q\text{-NBF}$ または $p_1/q_1 \oplus p_2/q_2\text{-NBF}$ と記すことにした。

p/q -GNBの定義.

p/q -NBF でも p/q -NB2C でもない p/q -NB を一般非バーコフ軌道 (p/q -GNB) と呼ぶことにする.

補遺A5の図42には, 楕円 $2/5$ -NBF を例として示した. このとき, 持ち上げられた2つの軌道 $\cdots \Rightarrow \eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \eta_2 \Rightarrow \eta_3 \Rightarrow \cdots$ と $\cdots \Rightarrow \eta'_2 \Rightarrow \eta'_3 \Rightarrow \eta'_4 \Rightarrow \eta'_5 \Rightarrow \cdots$ は円筒上では一致する. 2点 η_0 と η_1 は $\langle Z_{1/2} \rangle$ の共鳴領域にあり, $\eta_2(\eta'_2)$, η'_3 , および η'_4 は $\langle Z_{1/3} \rangle$ の共鳴領域にある. これらの事実から, この軌道が $2/5$ -NBF の条件を満たすことを確認することは容易である.

次に, 以下の定理を証明しよう.

定理 3.0.1.

- (i) TSBT内の任意の p/q に対して, 順序関係 p/q -NB2C $\rightarrow$ p/q -NBF が成り立つ.
- (ii) p/q と p'/q' は TSBT内の分数であって, $[p_1/q_1, p_2/q_2] \in \text{NFI}[p/q]$ および $[p'_1/q'_1, p'_2/q'_2] \in \text{NFI}[p'/q']$ に対して, 関係 $[p_1/q_1, p_2/q_2] \cap [p'_1/q'_1, p'_2/q'_2]$ が成り立つとする. このとき, 順序関係 p/q -NB2C $\rightarrow$ p'/q' -NB2C が成り立つ.

証明. (i) $\text{FP}[p/q] = \{p_2/q_2, p_3/q_3\}$ とし, $\{p_1/q_1, p_4/q_4\} \in \text{NFP}[p/q]$ を取る. 命題A.4.1より

$$p_1/q_1 < p_2/q_2 < p_3/q_3 < p_4/q_4 \quad (16)$$

である. つまり, 2つの鎖 $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ と $\langle Z_{p_3/q_3} \rangle$ は, $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ と $\langle Z_{p_4/q_4} \rangle$ に挟まれる. 「出会いの場合」における状況を図15に示した. p/q -NB2Cが存在することを仮定したから, $T^m l_{p_4/q_4}(-p_4+1)$

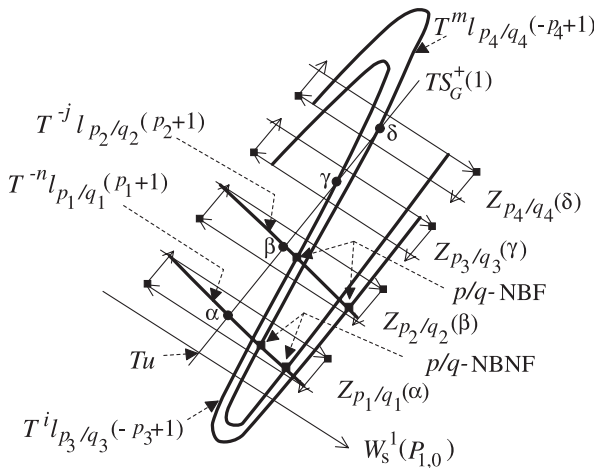


図15: 2つの共鳴領域 $Z_{p_2/q_2}(\beta)$ と $Z_{p_3/q_3}(\gamma)$ は $Z_{p_1/q_1}(\alpha)$ と $Z_{p_4/q_4}(\delta)$ に挟まれる.

は $T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1+1)$ と交わる. ただし, q_4 が偶数なら $m = (q_4+2)/2$, q_4 が奇数なら $m = (q_4+1)/2$ である. また, q_1 が偶数なら $n = (q_1-2)/2$, q_1 が奇数なら $n = (q_1-1)/2$ である. この状況では, $T^i l_{p_3/q_3}(-p_3+1)$ は $T^{-j} l_{p_2/q_2}(p_2+1)$ と交わる. ただし, q_3 が偶数なら $i = (q_3+2)/2$, q_3 が奇数なら $i = (q_3+1)/2$ である. また q_2 が偶数なら $j = (q_2-2)/2$, q_2 が奇数なら $j = (q_2-1)/2$ である. これらの交点は, $p = p_2 + p_3$ かつ $q = q_2 + q_3$ として, p/q -NBFの軌道点である.

図15において, p_2/q_2 を p'_1/q'_1 で置き換え, p_3/q_3 を p'_2/q'_2 で置き換え, さらに p_4/q_4 を p_2/q_2 に置き換える. すると, (i) の証明に使ったのと同じ手法により, (ii) が証明できる. 詳細は省く.

(Q.E.D.)

3.1 TSBT内のNBF

3.1.1 有理数に収束する道

以下の定理3.1.1を述べるためにいくつか臨界パラメータ値を導入する. TSBT内で $p/q \in (0, 1)$ に収束する道は2つある. 上から収束する道と下から収束する道である. 道 $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ は, p/q に上から収束するとし, $a_c(p_n/q_n - \text{NBF})$ は $p_n/q_n - \text{NBF}$ が出現する臨界パラメータ値であるとする. 道 $\{p'_n/q'_n\}_{n \geq 1}$ は p/q に下から収束するとし, $a_c(p'_n/q'_n - \text{NBF})$ は $p'_n/q'_n - \text{NBF}$ が出現する臨界パラメータ値であるとする. 臨界パラメータ値の極限を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_c(1/n - \text{NBF}) &= a_c(0/1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_c((n-1)/n - \text{NBF}) &= a_c(1/1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_c(p_n/q_n - \text{NBF}) &= a_c(p/q), \end{aligned}$$

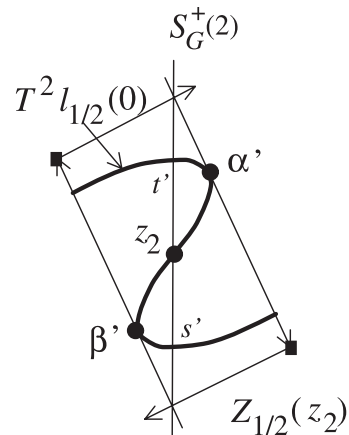


図16: $a = a_c(1/2)$ のときの $Z_{1/2}(z_2)$ と $T^2 l_{1/2}(0)$ の関係. z_2 は $1/2$ バークフ楕円軌道の点であり, 中黒四角は $1/2$ バークフサドル軌道の点である.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_c(p'_n/q'_n - \text{NBF}) &= a'_c(p/q), \\ a_c^{\max}(p/q) &= \text{Max}(a_c(p/q), a'_c(p/q)), \\ a_c^{\min}(p/q) &= \text{Min}(a_c(p/q), a'_c(p/q)).\end{aligned}\quad (17)$$

定理 1 より, これらはよく定義された量である. 数値例として, $a_c^{\max}(1/2) = a_c^{\min}(1/2) \simeq 2.54$, $a_c^{\max}(1/3) \simeq 1.80$, および $a_c^{\min}(1/3) \simeq 1.76$ がある. 数値計算からすると, $p/q \in (0, 1) \neq 1/2$ のとき $a_c^{\max}(p/q) \neq a_c^{\min}(p/q)$ が成り立つ. ただし, これは証明されていない. 回転数 $0/1$ を $1/1$ と同一視しよう. すると $0/1$ (および $1/1$) に上から収束する道と下から収束する道がある.

定理 3.1.1. $\lambda_{\max} = (2 + (44 - 3\sqrt{177})^{1/3} + (44 + 3\sqrt{177})^{1/3})/3 = 2.6589\cdots$ および $\lambda'_{\max} = 1 + \sqrt{2}$ とおく.
(i) $p/q = 0/1$ (および $1/1$), または $1/2$ の場合: 関係 $a_c^{\max}(p/q) = a_c^{\min}(p/q)$ が成り立つ. $a = a_c^{\max}(p/q) = a_c^{\min}(p/q)$ において, $(\ln \lambda_{\max})/q$ は位相エントロピーの下界である.
(ii) $p/q \in (0, 1) \neq 1/2$ の場合: $a_c^{\max}(p/q) = a_c^{\min}(p/q)$ が成り立てば, $(\ln \lambda_{\max})/q$ は位相エントロピーの下界である. $a_c^{\max}(p/q) \neq a_c^{\min}(p/q)$ が成り立てば, $a = a_c^{\max}(p/q)$ のときに $(\ln \lambda_{\max})/q$ は位相エントロピーの下界であり, $a = a_c^{\min}(p/q)$ のときに $(\ln \lambda'_{\max})/q$ は位相エントロピーの下界である.

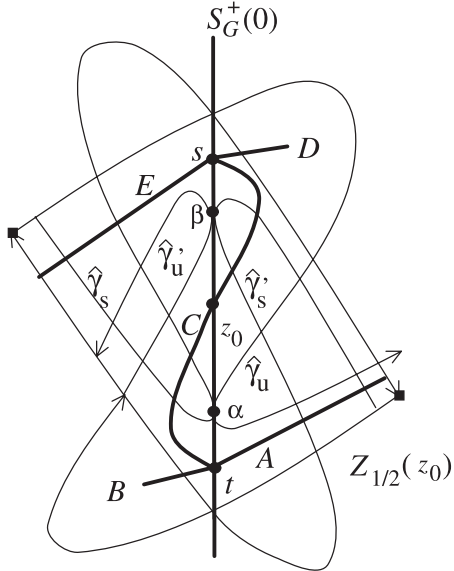


図17: $a = a_c(1/2)$ のときの $Z_{1/2}(z_0)$ と $l_{1/2}(0)$ の関係. z_0 は $1/2$ パーコフ楕円軌道の点であり, 中黒四角は $1/2$ パーコフサドル軌道の点である. また $s = T^{-2}s'$ および $t = T^{-2}t'$ である. ただし, s' と t' は図16で定義された. 点 A, B, C, D, E はトレリス法の適合グラフ (compatible graph) を構成する.

(i) の証明. 式 (43), (44) に準じて, $l_{0/1} = l_{0/1}(0) = S_H(1) \cap Z_{0/1}(Q_{0,0})$ を導入する. このとき, 関係 $R_{Q_{0,0}} T^k l_{0/1} = T^k l_{0/1}$ が成り立つ. この事実, 性質 A.3.1 (i), および 2π だけの上下の平行移動の下での構造の不変性より, $a_c(0/1) = a'_c(1/1)$ が成り立つ. だから, $a_c^{\max}(0/1) = a_c^{\min}(0/1) = a_c^{\max}(1/1) = a_c^{\min}(1/1)$ が成り立つ.

$z_0 = (0, \pi) \in S_G(0)$ および $z_2 = (2\pi, \pi) = T^2 z_0$ として, 性質 A.3.1 (ii) と性質 A.3.2 より, $R_{z_2} Z_{1/2}(z_2) = Z_{1/2}(z_2)$ と $R_{z_2} T^2 l_{1/2}(0) = T^2 l_{1/2}(0)$ が成り立つ. だから, 関係 $a_c^{\max}(1/2) = a_c^{\min}(1/2)$ が成り立つ.

$\{p_n/q_n\}_{n \geq 1} = \{1/2, 2/3, 3/5, 4/7, \dots, n/(2n-1), \dots\}$ は $1/2$ に上から収束する道である. このとき, 共鳴鎖の列 $\{\langle Z_{p_n/q_n} \rangle\}$ は $\langle Z_{1/2} \rangle$ に上から収束する. $\{p'_n/q'_n\}_{n \geq 1} = \{1/2, 1/3, 2/5, 3/7, \dots, n/(2n+1), \dots\}$ は $1/2$ に下から収束する道である. このとき, 共鳴鎖列 $\{\langle Z_{p'_n/q'_n} \rangle\}$ は $\langle Z_{1/2} \rangle$ に下から収束する. 出会いの場における $Z_{1/2}(z_2)$ の近傍を考えよう. 弧 $T^2 l_{1/2}(0)$ の一部が $Z_{1/2}(z_2)$ の外に出れば, 外に出た部分弧は, 十分大きな整数 n に対して, $\langle Z_{p'_n/q'_n} \rangle$ の共鳴領域の2つの長辺と交わる. ゆえに $T^{-m} l_{p'_n/q'_n}(\zeta_0)$ と交わる. ただし, q'_n が奇数なら $m = (q'_n - 1)/2$ および $\zeta_0 \in S_H(p'_n + 1)$ であり, q'_n が偶数なら $m = (q'_n - 2)/2$ および $\zeta_0 \in S_G(p'_n + 1)$ である. これは $1/2$ へ向かう道内に $(p'_n + 1)/(q'_n + 2)$ -NBF が存在することを意味する. 道内に NBF が存在しないためには, $T^2 l_{1/2}(0)$ が $Z_{1/2}(z_2)$ の外に出てはいけな. 極限的な場合, $T^2 l_{1/2}(0)$ は $Z_{1/2}(z_2)$ の境界のうち安定多様体の弧に接する. この状況を, $R_{z_2} \alpha' = \beta'$ として, 図16に示した.

次に, 図16に示された状況において, 系の位相エントロピーの下界を計算する. $Z_{1/2}(z_2)$, $T^2 l_{1/2}(0)$, およびそのほかの曲線に T^{-2} を作用させる. すると, その像は $z_0 \in S_G^+(0)$ のまわりの領域に戻ってくる. $T^2 l_{1/2}(0)$ は, 図16に見えるように, $1/2$ パーコフサドル点の安定多様体に接する. だから $l_{1/2}(0)$ も $1/2$ パーコフサドル点の安定多様体に接する. 加えて, $1/2$ パーコフサドル点の不安定多様体は, G の対称軸に関して安定多様体と対称である. つまり, 安定多様体が $l_{1/2}(0)$ に接する点で不安定多様体は $l_{1/2}(0)$ に接する. このことは図17に示される. 安定多様体の弧 $\hat{\gamma}_s$ と不安定多様体の弧 $\hat{\gamma}_u$ は $l_{1/2}(0)$ 上の $\alpha (= T^{-2} \alpha')$ において接し, 安定多様体の弧 $\hat{\gamma}_s$ と不安定多様体の弧 $\hat{\gamma}_u$ は $l_{1/2}(0)$ 上の $\beta (= T^{-2} \beta')$ において接する. トレリス法 [14] を図17に示されるトレリスに適用すると, 図17に太い弧で描かれた適合グラフ (compatible graph) を得る. この適合グラフには, 3

つの周期点 z_0, s , および t がある. これらは, 円筒上に射影すると, $\tilde{z}_0 = \tilde{T}^2 z_0, \tilde{s} = \tilde{T}^2 s$, および $\tilde{t} = \tilde{T}^2 t$ を満たす. ここで, 2 点 s と t は, それぞれ 3-分岐点 (three-prongs) と呼ばれる. これらの点の周期性を使って, 5つの分枝 A, B, C, D および E の $\tilde{T}^2$ の下での像を決めることができ, 以下を得る.

- (i) A の像は A と C を 1 回覆い, B を 2 回覆う;
 - (ii) B の像は E を 1 回覆う;
 - (iii) C の像は C を 1 回覆い, B と D を 2 回覆う;
 - (iv) D の像は A を 1 回覆う;
 - (v) E の像は C と E を 1 回覆い, D を 2 回覆う.
- これらの事実から, 遷移行列 M が以下のように得られる.

$$M = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

M の最大固有値 $\lambda_{\max} = (2 + (44 - 3\sqrt{177})^{1/3} + (44 + 3\sqrt{177})^{1/3})/3 = 2.6589\dots$, は以下の特性方程式の一意の実根である.

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0. \quad (19)$$

よって, 位相エントロピーの下界は $(\ln \lambda_{\max})/2$ と得られる. 道が $0/1$ または $1/1$ に向かうなら, 位相エントロピーの下界は $\ln \lambda_{\max}$ である. (Q.E.D.)

(ii) の証明. 関係 $a_c^{\max}(p/q) = a_c^{\min}(p/q)$ が成り立つなら, 証明は上と同じである. そこで, $a_c^{\max}(p/q) \neq a_c^{\min}(p/q)$ の場合を考える. $a = a_c^{\max}(p/q)$ において, 図17の2つの接触のひとつが横断的交差に変わる. この交差の効果を無視して, こども図17に示される適合グラフが得られる. だから位相エントロピーの下界は $(\ln \lambda_{\max})/q$ である.

$a = a_c^{\min}(p/q)$ のとき, 図17の2つの接触のひとつは存在するが, もうひとつは消える. この場合, 多くの可能な配置がある. まず, 図18のトレリス (TRとした) が実現している場合を考察する. 弧 $\hat{\gamma}_s$ (または, $\hat{\gamma}_s$) と弧 $\hat{\gamma}_u$ (または, $\hat{\gamma}_u$) は4点で交わる. この場合, 分枝 X が適合グラフに現われる. その像は D であるが, その前像を決めることはできない. だから, この適合グラフから遷移行列を得るのはむずかしい. この困難を

回避するために, $\hat{\gamma}_u$ と $\hat{\gamma}_s$ を変形して, 図19の接触状況にまで後退させる. この図から得られるトレリス TR_1 は TR より単純である. 筆者らの目的のためには, 単純なトレリス TR_1 から位相エントロピーを計算するだけで十分である. 対応する遷移行列 M_1 は次のとおりである.

$$M_1 = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E \\ A & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

M_1 の特性方程式は

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 \quad (21)$$

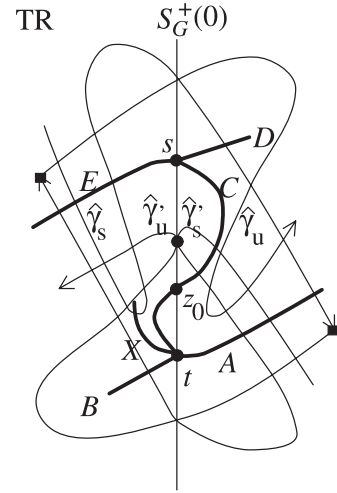


図18: TRに対する適合グラフ. ここでは $\hat{\gamma}_s$ と $\hat{\gamma}_u$ の接触は消え, 新たな辺 X が現れている.

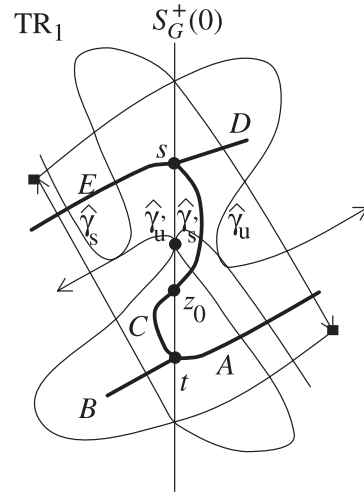


図19: TR_1 に対する適合グラフ. 図18の X は消滅している.

である．最大固有値 $\lambda'_{\max} = 1 + \sqrt{2}$ は方程式 $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ の正根として得られる．

こんどは，TRもTR₁も実現しないとしてみる．この場合，第二の可能性として，図20に示したトレリスTR₂が $a = a_c^{\min}(p/q)$ のときに実現している．図20において， $\sigma^{-2}\hat{\gamma}_s$ は $\hat{\gamma}_u$ に接する．遷移行列 M_2 が以下のように得られる．

$$M_2 = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E & F & G \\ A & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

M_2 の特性方程式は

$$\lambda^3(\lambda^2 - 2\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 \quad (23)$$

である．

式(21)と式(23)の違いは λ のべきのみである．式(21)と式(23)の最大根は同じである．

第二の可能性は実現しないかもしれない．その場合， $n = 3, 4, \dots$ として， n 番目の可能性を次々と試していく． n 番目の可能性とは，トレリスTR_nが実現することである．ここで， $\sigma^n T^{-2n} \hat{\gamma}_s$ (または， $\hat{\gamma}_s$) と $\hat{\gamma}_u$ (または， $\sigma^n T^{-2n} \hat{\gamma}_u$) が互いに接し， $\hat{\gamma}_u$ と $\hat{\gamma}_s$ の接触がつねに存在する．これで，定理3.1.1(ii)の前提から言える可能な配置はすべて尽くされる．トレリスTR_nに対して，特性方程式は

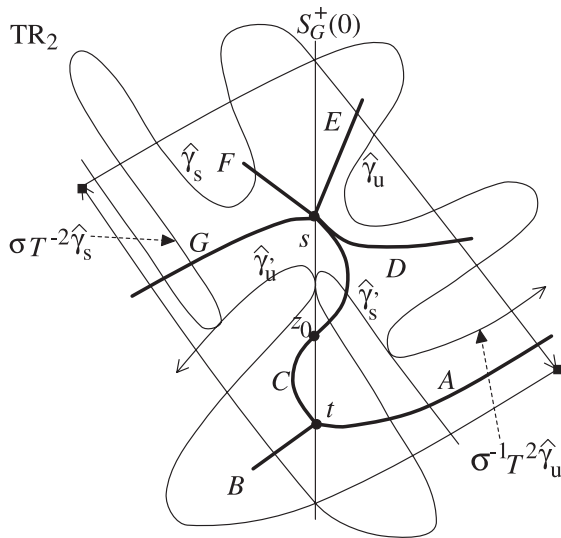


図20：TR₂に対する適合グラフ． $\sigma T^{-2} \hat{\gamma}_s$ と $\hat{\gamma}_u$ は接し， $\sigma^{-1} T^2 \hat{\gamma}_u$ と $\hat{\gamma}_s$ も接する．

$$\lambda^{2n-1}(\lambda^2 - 2\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 \quad (24)$$

と得られる．一連の特性方程式を見ると，最大固有値は，図17に示された， β での接触によって決まることがわかる．その値は安定多様体と不安定多様体のもうひとつの分枝の振る舞いに依らない．ただし，弧 $\hat{\gamma}_s$ と $\hat{\gamma}_u$ が離れている限り，である．最大固有値は $\lambda'_{\max} = 1 + \sqrt{2}$ である．これで証明が終わった．(Q.E.D.)

3.1.2 TSBTにおいてゼロに収束する分数列

本節の目的は，以下の命題3.1.2を証明することである．

命題3.1.2. 標準写像においては，任意の $a > 0$ に対してNBFが存在し，系の位相エントロピーは正である．

証明．性質3.2.2（以下を見よ）および定理1.1(iv)から，命題3.1.2が導かれる．(Q.E.D.)

道 $[1/2]L^\infty$ は 0 に収束する．ゼロに収束する道はこれ以外にない．文献 [8] で証明されたように，道 $[1/2]L^\infty$ の極限において， $T\gamma_u$ と $S_H^-(1)$ は互いに接し， $T^{-1}\Gamma_s$ と $S_H^-(1)$ も互いに接する (γ_u と Γ_u の定義に関しては，補遺A.3節の図38を見よ)．これは極限が $a=0$ に対応しないことを意味する．0 に収束する分数列が必要である．

L と R では書けないSBTの分数列 $\{p(k)/q(k)\}_{k \geq 1}$ を考えよう，これは道ではない．以下の条件を満たす分数列 $\{p(k)/q(k)\}_{k \geq 1}$ をゼロへのスキップ道と呼ぶ．

- 1) 関係 $p(k) \geq 2$ が $k \geq 1$ のときに成り立つ；
- 2) 任意の k に対して， $p(k+1)/q(k+1)$ は $p(k)/q(k)$ より上の階に属する；
- 3) 分数は階を上がるにつれて単調減少，しかも $\lim_{k \rightarrow \infty} p(k)/q(k) = 0$ である．

たとえば，列 $\{2/5, 2/7, 2/9, \dots, 2/(2n+1), \dots\}$ はゼロへのスキップ道である．以下の命題3.1.3が成り立つ．

命題 3.1.3. $\{p(k)/q(k)\}_{k \geq 1}$ はゼロへのスキップ道であるとする．このとき次の関係が成り立つ．

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_c(p(k)/q(k) - \text{NBF}) = 0. \quad (25)$$

証明． $\lim_{k \rightarrow \infty} a_c(p(k)/q(k) - \text{NBF}) = \delta > 0$ と仮定し，矛盾を導く．FP $[p(k)/q(k)] = \{p_1(k)/q_1(k), p_2(k)/q_2(k)\}$ とおく．

$0 < a < \delta$ のとき, 点 u と v において安定多様体と不安定多様体が横断的に交わるので, ホモクリニックローブが存在する (補遺 A.3 節の図 38). $TS_G(1)$ に沿って並んでいる共鳴領域 (たとえば図 1 を見よ) は Γ_s を含む $W_s^1(P_{1,0})$ の弧に収束するから, 整数 k があって, 共鳴領域 $Z_{p_1/q_1}(\alpha)$ も $Z_{p_2/q_2}(\beta)$ もホモクリニックローブと交わる (図 21 を見よ). そして条件 $p(k) = p_1(k) + p_2(k)$ と $q(k) = q_1(k) + q_2(k)$ が満たされる. ここで, α と β はそれぞれ p_1/q_1 および p_2/q_2 パーコフ楕円点である. この状況では, Γ_u は $Z_{p_1/q_1}(\alpha)$ と $Z_{p_2/q_2}(\beta)$ を貫く. このことから, $T^m l_{p_1/q_1}(-p_1+1)$ は $T^{-n} l_{p_2/q_2}(p_2+1)$ と交わり, その交点は $Z_{p_2/q_2}(\beta)$ 内にある. ただし, q_1 が偶数なら $m = (q_1+2)/2$, q_1 が奇数なら $m = (q_1+1)/2$ であり, q_2 が偶数なら $n = (q_2-2)/2$, q_2 が奇数なら $n = (q_2-1)/2$ である. このことから $p(k)/q(k)$ -NBF の存在が言える. だから矛盾に至った. (Q.E.D.)

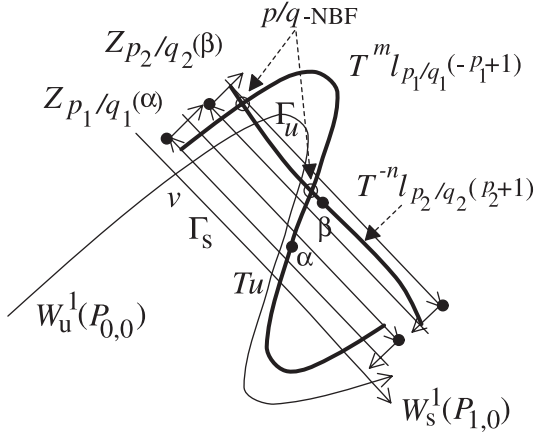


図21：不安定多様体の弧 Γ_u は $Z_{p_1/q_1}(\alpha)$ と $Z_{p_2/q_2}(\beta)$ を貫く. 点 α と β はともにパーコフ楕円周期軌道点であり, $TS_G^+(1)$ 上にある. $Z_{p_2/q_2}(\beta)$ 内の中黒四角は $p(k)/q(k)$ -NBF の軌道点である. ここで p/q は $p(k)/q(k)$ の省略形である.

3.1.3 TSBT内の無理数に収束する道

TSBT内の無理数 ω に収束する道を考えよう. 例として, $[(3-\sqrt{5})/2] = [1/2](LR)^\infty$ に向かう道は $\{1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, \dots\}$ である.

p/q は SBT 内にあるとし, $EO(z_0) = \{\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots\}$ は p/q パーコフ楕円 (拡張) 軌道であるとする ($\pi_x(z_k) < \pi_x(z_{k+1})$). このとき, 各軌道点 z_k は自分の共鳴領域 $Z_{p/q}(z_k)$ を持ち, それに伴うホモクリニックローブを持つ. ホモクリニックローブ $V_{p/q}^u(z_k)$ と $V_{p/q}^d(z_k)$ は出口ローブと呼ばれ, $U_{p/q}^u(z_k)$ と $U_{p/q}^d(z_k)$ は入口ローブと呼ばれる

(図22を見よ). 任意の軌道が鎖 $\langle Z_{p/q} \rangle$ より上の領域から下の領域に移動するとき, また下の領域から上の領域に移動するとき, 必ず $\langle Z_{p/q} \rangle$ の入口ローブと出口ローブに軌道点を持たねばならない. このことは, 通過軌道が $\langle Z_{p/q} \rangle$ に点を持たなくても成り立つ.

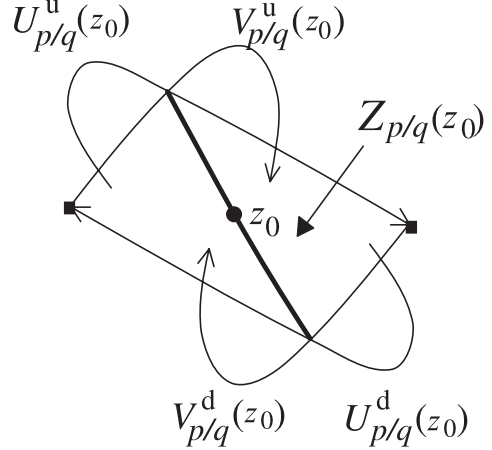


図22： $Z_{p/q}(z_0)$ の4つのホモクリニックローブの定義. $V_{p/q}^u(z_0)$ と $V_{p/q}^d(z_0)$ は出口ローブであり, $U_{p/q}^u(z_0)$ と $U_{p/q}^d(z_0)$ は入口ローブである. 中黒円は p/q パーコフ楕円軌道の点であり, 2つの中黒四角は p/q パーコフサドル軌道の点である. 太い弧は対称軸またはその像を示す.

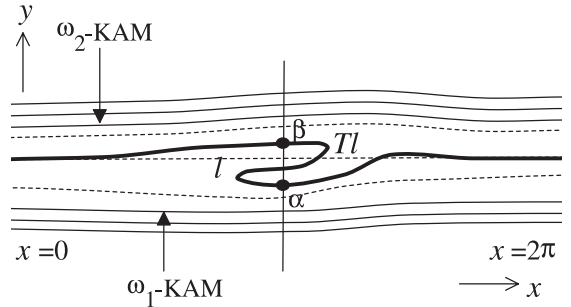


図23：円筒上でのパーコフ不安定ゾーンの出現. 不安定ゾーンは ω -KAM の崩壊とともに現われる. ω_1 -KAM はゾーンの下側境界, ω_2 -KAM は上側境界である.

さて, 標準写像の不安定ゾーンの起源について考察する. 厳密な話ではないことを断っておく. 回転数 ω の不変曲線 (ω -KAM と呼ぶ) が $a_c(\omega)$ のときに崩壊し消滅する. $a > a_c(\omega)$ のとき, 回転数 ω の単調準周期軌道の集合 (Σ_ω と記す) が ω -KAM の代わりに存在してオーブリーマザー集合を含む. これらの軌道はコントロール集合であり, リブシッツ曲線 ζ_ω に沿って存在する

(A.7節). ω -KAMの場合と対照的に, $T\zeta_\omega$ はグラフにならない. どこかに折り畳みを持つ. 直観的な描像を得るために, 図23に $T\zeta_\omega$ の折り畳み構造を描いた. これから理解できるように, 図の点 α と β に挟まれた鉛直区間をKAM曲線は通過し得ない. このことから不安定ゾーンの存在が出る [42]. 不安定ゾーンの下境界は α より下にあり, 上境界は β より上にある. 境界はKAM曲線である. 2つの境界KAM曲線を ω_1 -KAMおよび ω_2 -KAMと記す. ただし, $-\infty \leq \omega_1 < \omega_2 \leq +\infty$ である. このKAM曲線を使って, 不安定ゾーンを $Z(\omega_1, \omega_2)$ と書く (A.6節). 標準写像で最後のKAM曲線が消失すると, 全空間 $-\infty < y < \infty$ が不安定ゾーンとなる.

すでに1.3節で述べたように, 以下の定理3.1.4はボイランドーホール [4] の定理である. われわれは初等的な別証をあたえる.

定理 3.1.4. $a_c(\omega)$ は ω -KAMが消失する臨界パラメータ値であるとする. $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ はTSBT内で ω に収束する道であるとし, $a_c(p_n/q_n - \text{NBF})$ は $p_n/q_n - \text{NBF}$ がサドルーノード分岐で出現する臨界パラメータ値であるとする. このとき以下の関係式が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_c(p_n/q_n - \text{NBF}) = a_c(\omega). \quad (26)$$

証明. 式 (26) の左辺の値が $a_c(\omega)$ 以上であることはほぼ自明である. 以下では, ある $\delta > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_c(p_n/q_n - \text{NBF}) = a_c(\omega) + \delta \quad (27)$$

を仮定して矛盾を導こう. n^* をどんなに大きく固定しても, $n > n^*$ のとき, パラメータ区間 $a_c(\omega) < a < a_c(\omega) + \delta$ に, $p_n/q_n - \text{NBF}$ が存在することを証明しよう. これは式 (27) に矛盾する.

$a_c(\omega) < a < a_c(\omega) + \delta$ のとき, $\omega_1 < \omega < \omega_2$ なる無理数 ω_1 と ω_2 があって, 不安定ゾーン $Z(\omega_1, \omega_2)$ が存在する. 回転数 ω のオーブリーーマザー集合の乗るリプシッツ曲線 ζ_ω はこの不安定ゾーン内にある. $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ の2つの部分列 $\{r_{n_l}/s_{n_l}\}_{l \geq 1}$ と $\{t_{n_m}/u_{n_m}\}_{m \geq 1}$ を選び出す. ただし, $\langle Z_{r_{n_l}/s_{n_l}} \rangle$ は ζ_ω より上に, $\langle Z_{t_{n_m}/u_{n_m}} \rangle$ は ζ_ω より下にあるとし, すべての m, l に対して以下の不等式が成り立つようにする.

$$\omega_1 < t_{n_m}/u_{n_m} < \omega < r_{n_l}/s_{n_l} < \omega_2.$$

道 $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ は ω のまわりを無限回上下するから, この選び方は可能である.

任意に小さな $\epsilon > 0$ に対して, ω_2 -KAMの ϵ 近傍に点 ξ_0 を取る. この点は ζ_ω より上にあり, ある $j \geq 1$ に対して $\xi_j = T^j \xi_0$ は ω_1 -KAMの ϵ 近傍にあって ζ_ω より下にあるとする. バーコフ定理 [42] より, このような軌道の存在は保証されている. この軌道 $O(\xi_0)$ の軌道点は ζ_ω より上の領域から下の領域へ有限回の写像の下に移動するから, ある k に対して軌道点 ξ_k と ξ_{k+1} があって, ξ_k は ζ_ω より上にあり, ξ_{k+1} はそれより下にある. 今後, (軌道) 切片 $\{\xi_k, \xi_{k+1}\}$ が ζ_ω を横切るということにする. 切片 $\{\xi_k, \xi_{k+1}\}$ が ζ_ω を横切る仕方を, ξ_k と ξ_{k+1} の位置の違いに着目して分類する. すなわち, ξ_k と ξ_{k+1} のどちらか, あるいは両方が共鳴領域に属するか否かに応じて4つの場合が生じる (図22参照).

C1: 2つの共鳴領域 $Z_{r_{n_l}/s_{n_l}}(T^{-1}\alpha)$ と $Z_{t_{n_m}/u_{n_m}}(\beta)$ があって, $\xi_k \in Z_{r_{n_l}/s_{n_l}}(T^{-1}\alpha)$ および $\xi_{k+1} \in Z_{t_{n_m}/u_{n_m}}(\beta)$ である (図24を見よ). 加えて, $\xi_k \in U_{r_{n_l}/s_{n_l}}^u(T^{-1}\beta)$ および $\xi_{k+1} \in V_{r_{n_l}/s_{n_l}}^d(\alpha)$ が成り立つ.

C2: 共鳴領域 $Z_{r_{n_l}/s_{n_l}}(T^{-1}\alpha)$ と出口ローブ $V_{t_{n_m}/u_{n_m}}^d(\beta)$ があって, $\xi_k \in Z_{r_{n_l}/s_{n_l}}(T^{-1}\alpha)$ および $\xi_{k+1} \in V_{t_{n_m}/u_{n_m}}^d(\beta)$ である. 加えて $\xi_k \in U_{r_{n_l}/s_{n_l}}^u(T^{-1}\beta)$ および $\xi_{k+1} \in V_{r_{n_l}/s_{n_l}}^d(\alpha)$ が成り立つ.

C3: 入口ローブ $U_{r_{n_l}/s_{n_l}}^u(T^{-1}\alpha)$ と共鳴領域 $Z_{t_{n_m}/u_{n_m}}(\beta)$ があって, $\xi_k \in U_{r_{n_l}/s_{n_l}}^u(T^{-1}\alpha)$ および $\xi_{k+1} \in Z_{t_{n_m}/u_{n_m}}(\beta)$ である. 加えて, $\xi_k \in U_{t_{n_m}/u_{n_m}}^u(T^{-1}\beta)$ および $\xi_{k+1} \in V_{r_{n_l}/s_{n_l}}^d(\alpha)$ が成り立つ.

C4: 入口ローブ $U_{r_{n_l}/s_{n_l}}^u(T^{-1}\alpha)$ と出口ローブ $V_{t_{n_m}/u_{n_m}}^d(\beta)$ があって, $\xi_k \in U_{r_{n_l}/s_{n_l}}^u(T^{-1}\alpha)$ および $\xi_{k+1} \in V_{t_{n_m}/u_{n_m}}^d(\beta)$ である. 加えて, $\xi_k \in U_{t_{n_m}/u_{n_m}}^u(T^{-1}\beta)$ および $\xi_{k+1} \in V_{r_{n_l}/s_{n_l}}^d(\alpha)$ が成り立つ.

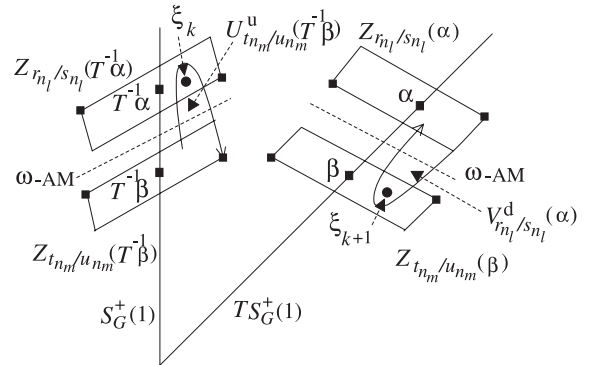


図24: C1の状況. 軌道点 ξ_k は ζ_ω より上にあり, $\xi_{k+1} (= T\xi_k)$ は ζ_ω より下にある.

C1の状況を考えてみよう． $N > n_l$ かつ $M > n_m$ とする．このとき， $V_{r_N/s_N}^d(\alpha_N)$ の不安定多様体の弧）は2つの共鳴領域 $Z_{t_M/u_M}(\beta_M)$ と $Z_{r_N/s_N}(\alpha_N)$ を2回通過する．ここで， α_N は r_N/s_N -バーコフ点， β_M は t_M/u_M -バーコフ点であり，どちらも $TS_G^+(1)$ 上にある．簡単にわかるように，この性質はC2，C3，およびC4の場合も成り立つ．すると，

$$V_{t_M/u_M}^d(\beta_M) \cap V_{r_N/s_N}^d(\alpha_N) \neq \emptyset$$

が成り立つ．図25にそれを示した．

さて， $t_M/u_M < p'/q' < p''/q'' < r_N/s_N$ なる2つの分数 p'/q' と p''/q'' を選ぶ．上で述べたことから，

$$V_{p'/q'}^d(\beta') \cap V_{p''/q''}^d(\alpha') \neq \emptyset$$

が成り立つ．ここで， α' は p''/q'' -バーコフ点， β' は p'/q' -バーコフ点であり，どちらも $TS_G^+(1)$ 上にある．さらに，TSBTにおいて， p'/q' はLR転回点であるとし， p''/q'' は p'/q' の右親であるとする． $p'/q' < \omega$ である．一方， $p''/q'' < \omega$ または $p''/q'' > \omega$ である． p'/q' の右娘は $(p'+p'')/(q'+q'')$ である． p''/q'' も $(p'+p'')/(q'+q'')$ も ω に向かう道に乗っている．これらの分数に関する関係を図26に示しておいた．

さて，普遍被覆において，対称軸の像を考え，NBFの存在を証明しよう．写像の回数 $\hat{m}$ と $\hat{n}$ を次のように定義する．すなわち， q'' が偶数のとき $\hat{m} = (q''+2)/2$ ， q'' が奇数のとき $\hat{m} = (q''+1)/2$ ， q' が偶数のとき $\hat{n} = (q'-2)/2$ ，そして q' が奇数のとき $\hat{n} = (q'-1)/2$ と取る． $T^{\hat{m}}l_{p'/q'}(-p''+1)$ は $V_{r_N/s_N}^d(\alpha_N)$ を迂回するから， $T^{-\hat{n}}l_{p'/q'}(p'+1)$ と交わる（図27を見よ）．交点は $(p'+p'')/(q'+q'')$ -NBの軌道点である．上で述べたように， $(p'+p'')/(q'+q'')$ は p'/q' の右娘である．だから， $(p'+p'')/(q'+q'')$ -NBは $(p'+p'')/(q'+q'')$ -NBFである．分数列 $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ において， n^* の値は， p'/q' が属する階とする． n^* はいくらでも大きく取れることを確認して欲しい． $(p'+p'')/(q'+q'')$ -NBFは p_{n^*+1}/q_{n^*+1} -NBFであることがわかる．定理1(ii)とこの結果から， $n > n^*$ のとき p_n/q_n -NBFが存在することがわかる．こうして矛盾に至った．(Q.E.D.)

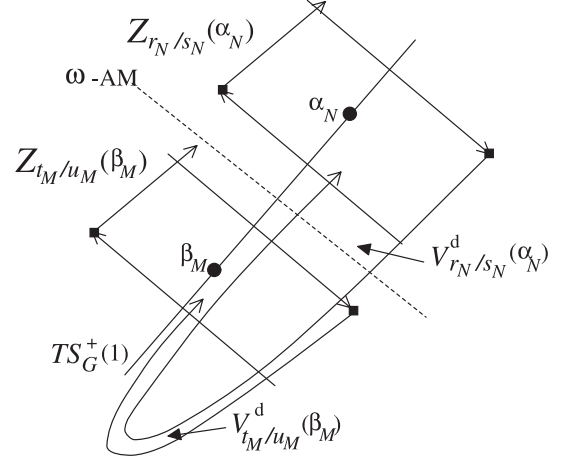


図25：2つの出口ローブ $V_{t_M/u_M}^d(\beta_M)$ と $V_{r_N/s_N}^d(\alpha_N)$ は交わる．

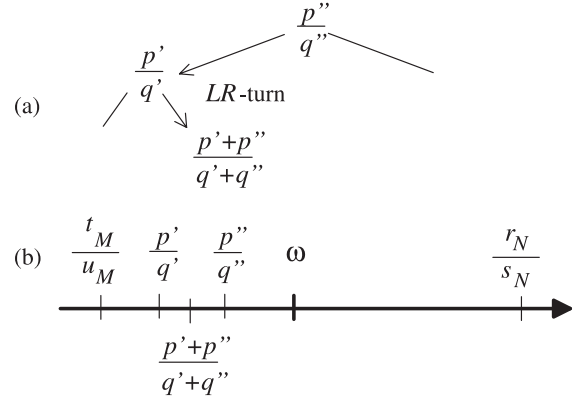


図26：(a) TSBTにおける p'/q' ， p''/q'' ，および $(p'+p'')/(q'+q'')$ の関係．また (b) r_N/s_N ， t_M/u_M ， p'/q' ， p''/q'' ， $(p'+p'')/(q'+q'')$ ，および ω の関係．関係 $p''/q'' > \omega$ が満たされる場合もある．

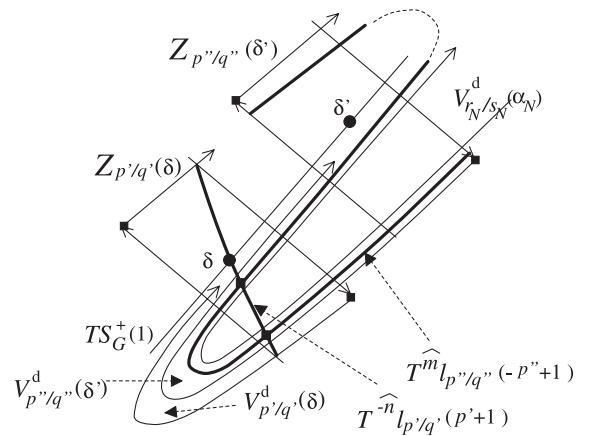


図27： $T^{\hat{m}}l_{p'/q'}(-p''+1)$ は $V_{r_N/s_N}^d(\alpha_N)$ を迂回し， $T^{-\hat{n}}l_{p'/q'}(p'+1)$ と交わる．交点は $(p'+p'')/(q'+q'')$ -NBFの軌道点である．

3.2 2つの共鳴鎖を連結する低速軌道

本節の目的は以下に述べる定理3.2を証明することである． $0 \leq p_1/q_1 < p_2/q_2 \leq 1$ とし， p_1/q_1 と p_2/q_2 はSBTに属するとする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 3.2. p/q -NBF ($p=p_1+p_2$, $q=q_1+q_2$, および $p_2q_1-p_1q_2=1$) が存在すれば， $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ を出発し，任意に長い写像回数を経て， $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ に到着する軌道が存在する．同様に， $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ を出発し，任意に長い写像回数を経て， $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ に到着する軌道が存在する．

証明. q_1 が奇数で q_2 が偶数の場合を証明する．他の場合も同じ手法で証明できる．TSBT内に $p_1/q_1 < p_3/q_3 < p_2/q_2$ なる p_3/q_3 を選んで，共鳴鎖 $\langle Z_{p_3/q_3} \rangle$ が $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ と $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ の間にあるようにす

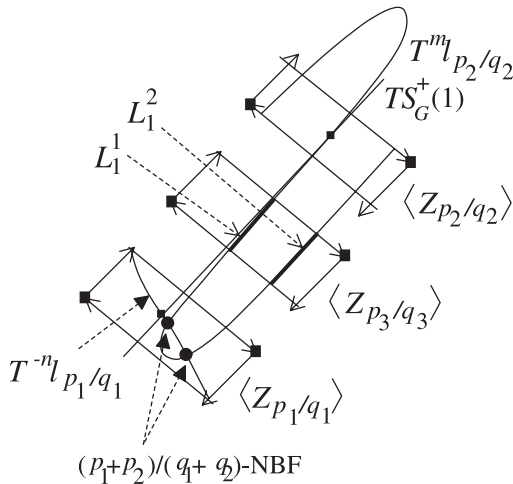


図28： L_1 を2つの弧から構築する．

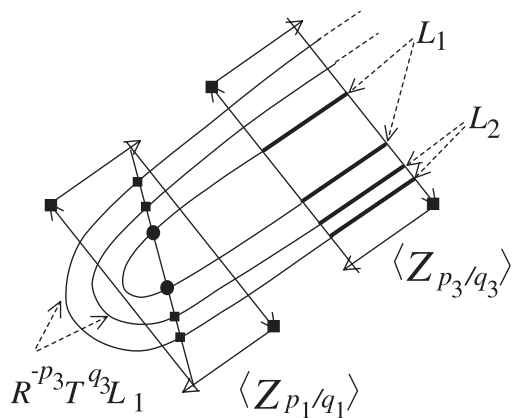


図29： L_1 の前進像は対称軸の後退像と鎖 $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ の共鳴領域において交わる． L_2 と記した弧も $\langle Z_{p_3/q_3} \rangle$ の共鳴領域に描いた．角のサドルは中黒四角で表現した．

る． p/q -NBFが存在するという仮定より，弧 $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ が弧 $T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1+1)$ と出合いの場で交わるようにできる．ただし， $m=(q_2+2)/2$ および $n=(q_1-1)/2$ である．図28の黒丸は交点を表す．これらは p/q -NBF の軌道点である．

この状況では，弧 $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ は，鎖 $\langle Z_{p_3/q_3} \rangle$ の共鳴領域 $A \equiv Z_{p_3/q_3}(\zeta_0)$ ($\zeta_0 \in TS_G(1)$) を2度通過する．ゆえに，弧 $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ は A 内に2本の部分弧を持つ．図28に，これらを L_1^1 および L_1^2 と記した．この部分弧は A を3つの部分領域に分割する．すなわち，左から A_1 , A_2 , および A_3 である． $L_1 = L_1^1 \cup L_1^2$ の上端は右端のサドルの安定多様体上にあるから， $\sigma^{-p_3} T^{q_3} L_1$ の上端はサドルに近づいており， $\text{clos}(A_3)$ に含まれる．

L_1 の下端は左端のサドル（黒四角）の安定多様体上にあるから， $\sigma^{-p_3} T^{q_3} L_1$ の下端はサドルに近く， $\text{clos}(A_1)$ に含まれる． $\sigma^{-p_3} T^{q_3} L_1$ と $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ の間に，不安定多様体がおとる．（図28と図29を見よ）．だから， $\sigma^{-p_3} T^{q_3} L_1$ は $T^m l_{p_2/q_2}(-p_2+1)$ を巻き， $T^{-n} l_{p_1/q_1}(p_1+1)$ と交わる．新たな交点は $(p_1+2p_3+p_2)/(q_1+2q_3+q_2)$ -GNB の軌道点である．次に，図29に示される $R^{p_3} T^{q_3} L_1$ の弧 L_2 の2つの成分を使い，上で述べた手続きを繰り返して $(p_1+4p_3+p_2)/(q_1+4q_3+q_2)$ -GNB の存在を証明する．最後に， $(p_1+2kp_3+p_2)/(q_1+2kq_3+q_2)$ -GNB ($k \geq 1$) の存在を証明する．この $(p_1+2kp_3+p_2)/(q_1+2kq_3+q_2)$ -GNB は $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ を出発し， $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ に， $2kq_3+q_2$ 回の写像の繰り返しの後に到達する． k は任意に大きくできるから，証明が完結した．(Q.E.D.)

遅い拡散はKAM曲線のまわりの「よどみ層」への捕捉であると広く受け入れられている [43]．筆者らは，共鳴鎖への捕捉をひとつの具体的機構として提案する．いまのところ，どの軌道が共鳴鎖に長く捕捉されるかについてはわからない．数値計算で調べることはできる．

3.3 考察

無理数 ω が与えられたとき，回転数 ω のKAM曲線が消失する臨界パラメータ値を $a_c(\omega)$ と書く．TSBT内の2つの道でそれぞれ無理数 ω と ω' に向かうものを考えよう．これらの道の上に位置するNBFを使って関係 $a_c(\omega) < a_c(\omega')$ または $a_c(\omega) > a_c(\omega')$ を出せるか？この問題は，最後のKAM曲線が消滅する問題に関係する．よく知られているように， ω_G を黄金比 $(\sqrt{5}+1)/2$ とした

とき, $(\omega_G - 1)$ -KAM が最後の KAM であることが広く受け入れられているが, 証明されてはいない.

回転数を決めたとき, NBF が最初に出現するのであれば $a_c(\omega)$ の決め方は単純である. 回転数 $2/q, 3/q, (q-2)/q, (q-3)/q (q \geq 5)$ の場合, NBF が最初に出現する. ところが, 回転数 $4/9$ の場合, 最初に現われる軌道は, $\langle Z_{1/2} \rangle$ の各共鳴領域に 3 点持ち, $\langle Z_{1/3} \rangle$ の各共鳴領域に 1 点ずつ持つ $4/9$ -GNB である. $\langle Z_{1/2} \rangle$ と $\langle Z_{3/7} \rangle$ の各共鳴領域に 1 点ずつ軌道点を持つ $4/9$ -NBF は, その次に現われる. このことから, 非バーコフ軌道の y 方向の動きの幅と順序関係の対応も 1 対 1 でない. すなわち, $p_1/q_1 \oplus p_2/q_2$ -NB の運動の (y 方向の) 幅を $d(p/q) = |p_2/q_2 - p_1/q_1|$ で測るとして, 関係 $d(p/q) < d(p'/q')$ から順序関係 $p'/q' - \text{NB} \rightarrow p/q - \text{NB}$ は出ない. だから, 問題は一筋縄ではいかない.

4 $\omega = \omega'$ の場合の連結軌道: NMQ の存在

本節では, $\omega = \omega'$ の場合に, マザーの連結定理 B を筆者らの手法で証明する (定理 3). 次に連結軌道同士の順序関係を導く (定理 4). 軌道 $O(z_0)$ が軌道 O_1 を軌道 O_2 に連結するのは, $O(z_0)$ が O_1 に α 漸近し, O_2 に ω 漸近する場合である. ここで $O(z_0)$ が O_1 に α 漸近するとは $k \rightarrow \infty$ のとき $\text{dist}(T^{-k} z_0, O_1) \rightarrow 0$ を意味し, $O(z_0)$ が O_2 に ω 漸近するとは $k \rightarrow \infty$ のとき $\text{dist}(T^k z_0, O_2) \rightarrow 0$ を意味する. $\text{dist}(T^{-k} z_0, O_1)$ は, 点と集合の間の距離である. すなわち z を点, A を集合, 2 点間の距離を $d(\cdot, \cdot)$ として, $\text{dist}(z, A) = \inf \{d(z, x) \mid x \in A\}$.

定理 3 は $O_1 = O_2$ の場合を述べる.

4.1 定理 3 の証明

(i) の証明. p_k/q_k -NBF が存在するという前提および文献 [16] の定理 1 より p_n/q_n -NBF は任意の $n \geq k$ に対して存在する. 便宜のため, $FP[p_k/q_k] = \{p'/q', p''/q''\}$ と書く. すると, 無理数 ω_- と ω_+ , および不安定ゾーン $Z(\omega_-, \omega_+)$ が存在し, 関係 $\omega_- < p'/q' < p_k/q_k < p''/q'' < \omega_+$ が成り立つ (式 (55) 参照). p_k/q_k -NBF の存在から以下の関係式が出る.

$$T^i l_{p'/q'}(-p^r+1) \cap T^{-i'} l_{p'/q'}(p^l+1) \neq \emptyset. \quad (28)$$

ここで, q^r が偶数のときは $i = (q^r + 2)/2$, q^r が奇数のときは $i = (q^r + 1)/2$ であり, q^l が偶数のときは $i' = (q^l - 2)/2$, q^l が奇数のときは $i' = (q^l -$

$1)/2$ である. 図 30 において, $T^i l_{p'/q'}(-p^r+1)$ は 'Z' 形の太い弧であり, $T^{-i'} l_{p'/q'}(p^l+1)$ は共鳴領域 $Z_{p'/q'}(\alpha)$ の対角線弧である. ただし, $\alpha \in TS_G^+(1)$ は p'/q' -BE の軌道点である. 小円で示した $Z_{p'/q'}(\alpha)$ 内の交点は, $p_k = p' + p''$ かつ $q_k = q' + q''$ なる p_k/q_k -NBF, あるいは同じことだが $p'/q' \oplus p''/q''$ -NBF の軌道点である.

$n > k$ を固定し, $\omega < p_n/q_n < p_r/q_r$ を取る. 共鳴領域 $Z_{p_n/q_n}(\delta)$ は $Z_{p'/q'}(\beta)$ と L_ω^r の間にある. $\delta \in TS_G^+(1)$ は p_n/q_n -BE の軌道点である. 次に, k 番目の LR 転回点 p_{m_k}/q_{m_k} を選ぶ. 共鳴領域 $Z_{p_{m_k}/q_{m_k}}(\gamma)$ は $Z_{p'/q'}(\alpha)$ と L_ω^r の間にある. ただし, $\gamma \in TS_G^+(1)$ は p_{m_k}/q_{m_k} -BE の軌道点である. 細い弧で示した $T^j l_{p_n/q_n}(-p_n+1)$ は $T^i l_{p'/q'}(-p^r+1)$ と交わることを避けるから, 対角線弧 $T^{-j'} l_{p_{m_k}/q_{m_k}}(p_{m_k}+1)$

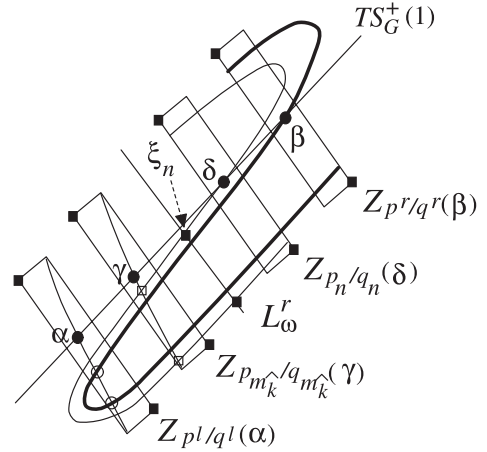


図 30 : 太い弧 $T^i l_{p'/q'}(-p^r+1)$ と細い弧 $T^j l_{p_n/q_n}(-p_n+1)$ の関係. 2 本の弧は 'Z' 形である.

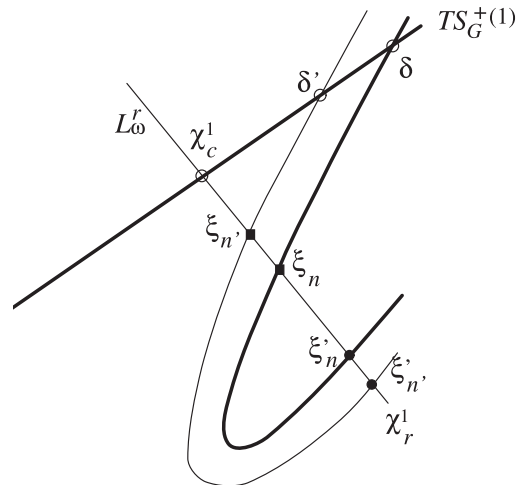


図 31 : ξ_n は $T^j l_{p_n/q_n}$ と L_ω^r の交点, ξ_n' は $T^{j'} l_{p_n/q_n}$ と L_ω^r の交点である. 点 δ は $T^j l_{p_n/q_n}$ と $TS_G^+(1)$ の交点, δ' は $T^{j'} l_{p_n/q_n}$ と $TS_G^+(1)$ の交点である.

と $Z_{p_{m_k}/q_{m_k}}(\gamma)$ 内で交わる。ここで、 q_n が偶数なら $j = (q_n + 2)/2$ ，奇数なら $j = (q_n + 1)/2$ であり、 q_{m_k} が偶数なら $j' = (q_{m_k} - 2)/2$ ，奇数なら $j' = (q_{m_k} - 1)/2$ である。交点は $Z_{p_{m_k}/q_{m_k}}(\gamma)$ 内に四角で示した。これは $(p_n + p_{m_k})/(q_n + q_{m_k}) - \text{NB}$ ，すなわち $(p_n/q_n) \oplus (p_{m_k}/q_{m_k}) - \text{NB}$ の軌道点である。 $k \rightarrow \infty$ の極限では、交点は L_ω 上の点に収束する。図30で ξ_n と記した点は収束点のひとつである。構築法より、この点の軌道は ζ_ω に閉じ込められておらず、したがって非単調である。この軌道を $p_n/q_n \oplus \omega$ - 非単調準周期軌道，略して $p_n/q_n \oplus \omega - \text{NMQ}$ と書く。同じ議論を使って、 $p_n/q_n < \omega$ に対して $p_n/q_n \oplus \omega - \text{NMQ}$ を得る。次の段落では、これが実際に準周期的であることを示す。

$p_n/q_n \oplus \omega$ -NMQは「前進」回転数 ω を持つ。性質A.7.1 (iii)より、点 ξ_n を出発する未来軌道 $O^+(\xi_n)$ は ζ_ω にとどまる。任意の正の k に対して未来軌道 $O(T^{-k}\xi_n)$ の場合、無数の軌道点が $\Delta_\omega \subset \zeta_\omega$ にある。だから「前進」回転数 ω である。「後退」回転数を得るために、過去軌道 $O^-(\xi_n)$ を考えよう。定義より、 $z_0 = T^{-j}\xi_n$ は q_n が偶数なら H の対称軸上にあり、 q_n が奇数なら G の対称軸上にある。 q_n が偶数の場合を考えよう。このとき、 z_0 は $S_H^+(-p_n+1)$ 内にある。 $k=1, 2, \dots$ に対して $T^k z_0 = HT^{-k} z_0$ である。つまり、 $T^k z_0$ ($k=0, \pm 1, \dots, \pm q_n/2$)は p_n/q_n -BEの共鳴鎖に属し、 $k < -q_n/2$ のとき $T^k z_0$ はふたたび Δ_ω に属す。だから $p_n/q_n \oplus \omega$ -NMQは「後退」回転数として ω を持つ。よって、 $p_n/q_n \oplus \omega$ -NMQは回転数 ω を持つ。(Q.E.D.)

(ii) の証明. 図31において, 点 δ , ξ_n および ξ'_n は $T^{j l}_{p_n/q_n}$ と $TS_G(1)$ の交点および L_ω との交点である. n を n' まで増やすと, 点 δ は δ' まで動き, ξ_n は $\xi_{n'}$ まで動き, ξ'_n は $\xi'_{n'}$ まで動く. 明らかに, 点 δ , ξ_n , および ξ'_n は, $n \rightarrow \infty$ のとき χ_c^l および χ_r^l に向かう. 2つの極限点は TL_ω^l と L_ω の交点である. $TL_\omega^l \cap L_\omega = \{\chi_l^l, \chi_c^l, \chi_r^l\}$ であることより, 極限点は集合 $\{\chi_l^l, \chi_c^l, \chi_r^l\}$ の要素である. (Q.E.D.)

定理 3 (ii)への補足

$n \rightarrow \infty$ のときの $p_n/q_n \oplus \omega$ -NMQ の極限は、道 $\{p_n/q_n\}_{n \geq 1}$ に沿って ω まで TSBT を下っていくとき（つまり、階を上がっていくとき）の極限に一致する。つまり、 p_n/q_n -NBF の軌道点は $n \rightarrow \infty$ の極限で、 $\Sigma_{\omega}^{\text{rec}}$ の端点 Δ_{ω} 内の作用ミニマックス準周期軌道に収束する。これは AM 集合と作用ミ

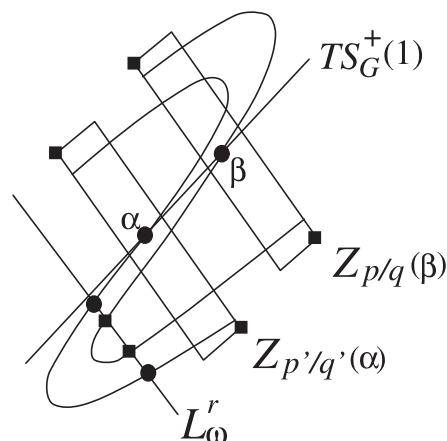


図32: L_ω 内の中黒四角は $p/q \oplus \omega$ -NMQ の存在を意味し, L_ω 内の円盤は $p'/q' \oplus \omega$ -NMQ の存在を意味する. ただし, 関係 $\omega < p'/q' < p/q$ が成り立つとしている.

ニマックス準周期軌道に関する新たな解釈であると思われる.

4.2 定理 4 の証明

(i) $\omega_- < \omega < p'/q' < p/q < \omega_+$ であって, q も q' も偶数の場合を考える. 他の場合と同様な仕方でも証明できる. $p/q \oplus \omega$ -NMQ の存在から, $n=q/2+1$ なる $T^n l_{p/q}(-p+1)$ は L_ω と交わる. 一方, $n'=q'/2+1$ なる $T^{n'} l_{p'/q'}(-p'+1)$ は $T^n l_{p/q}(-p+1)$ と交わることを避ける. だから L_ω と交わる (図32を見よ). こうして, $p'/q' \oplus \omega$ -NMQ の存在が証明された. (Q.E.D.)

(ii) $\omega_- < \omega < \omega' < p/q < \omega_+$ であつて q が偶数の場合を考える. 残りの場合の証明も同様である. $p/q \oplus \omega - \text{NM}Q$ の存在から $n = q/2 + 1$ なる $T^n|_{l_{p/q}}(-p+1)$ が L'_ω と交わる. L'_ω と L'_ω も交わる. なぜなら, L'_ω は L'_ω と $Z_{p/q}(\beta)$ に挟まれているからである. (Q.E.D.)

(iii) 上記 (i) と (ii) で使った手法を使えば良い. (Q.E.D.)

5 $\omega \neq \omega'$ の場合の連結軌道

本節では、 $\omega \neq \omega'$ の場合のマザーの連結定理 B を筆者らの手法で証明し (定理 5)，連結軌道間の順序関係を導く (定理 6)． p/q -B を p'/q' -B に連結する軌道を $\mathcal{H}(p/q, p'/q')$ と書く．同様に、 ζ_ω 内の点の軌道を ζ_ω 内の軌道の点の軌道に連結する軌道を $\mathcal{H}(\omega, \omega')$ と書く．記法 $\mathcal{H}(\omega, \omega')$ の意味は、 $z_0 \in \mathcal{H}(\omega, \omega')$ に対して、 α 極限集合が ζ_ω に含まれ、かつ ω 極限集合が $\zeta_{\omega'}$ に含まれることである．記法 $\mathcal{H}(\omega, p/q)$ および $\mathcal{H}(p/q, \omega)$ も使う．

5.1 定理 5 の証明

(i) の証明. $p/q \oplus p'/q'$ -NBF が存在する状況は図33に示した. $Z_{p/q}(\beta)$ 内の交点 (穴空き円) は $p/q \oplus p'/q'$ -NBF の軌道点である. A^l は $Z_{p'/q'}(\alpha)$ の左角にあるサドル点とし, B^l は $Z_{p/q}(\beta)$ の左角にあるサドル点とする. この状況では, 不安定多様体 $W_u(A^l)$ と安定多様体 $W_s(B^l)$ は交わる ($Z_{p/q}(\beta)$ の境界上の黒四角). 交点は $\mathcal{H}(p'/q', p/q)$ の軌道点である. $\mathcal{H}(p/q, p'/q')$ の存在証明も同様なので省略する.

$\mathcal{H}(p'/q', p/q)$ の非単調性はほぼ自明である. 実際, $z \in \mathcal{H}(p'/q', p/q)$ とすると, $T^{-k}z$ は k が十分大きいとき近似的に回転数 p'/q' を持ち, T^kz は k が十分大きいとき近似的に回転数 p/q を持つ. 2つの点列を円筒に射影したとき, 関係 $p'/q' < p/q$ より, 追い越しが生じる. (Q.E.D.)

(ii) の証明. $p/q \oplus p'/q'$ -NBF が存在すれば, $p'/q' < \omega < p/q$ なる任意の ω に対して ω -KAM は存在しない. 容易に確認できるように, $p'/q' < \omega_1 < \omega_2 < p/q$ なる 2つの無理数 ω_1 と ω_2 に対して, $(p+p')/(q+q')$ から ω_1 へ, ω_2 への道が存在する. これらの道を $\{r_k/s_k, r_{k+1}/s_{k+1}, \dots\}$ および $\{t_k/u_k, t_{k+1}/u_{k+1}, \dots\}$ と記す. ただし, $r_k/s_k = t_k/u_k = (p+p')/(q+q')$ とし, $n \geq k$ に対して $p'/q' < t_n/u_n < r_n/s_n < p/q$ とする. q が偶数で q' が奇数の場合を考える. 残りの場合も証明は同様である.

$(p+p')/(q+q')$ -NBF の存在から $T^i l_{p/q}(-p+1) \cap T^{-i'} l_{p'/q'}(p'+1) \neq \emptyset$ が出る. ただし, $i = q/2 + 1$

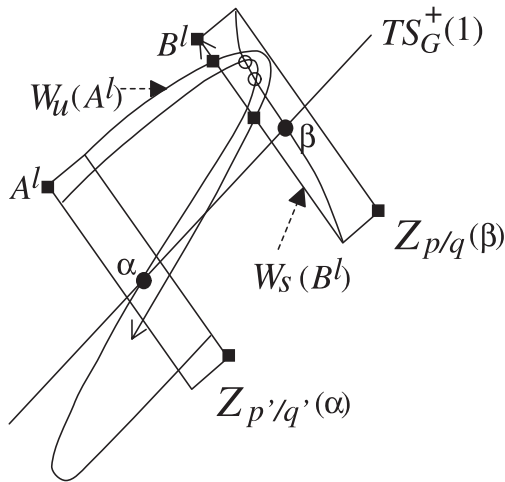


図33: $p/q \oplus p'/q'$ -NBF が存在する状況. $Z_{p/q}(\beta)$ 内の 2つの穴空き円は $p/q \oplus p'/q'$ -NBF の軌道点である. 不安定多様体 $W_u(A^l)$ は安定多様体 $W_s(B^l)$ と交わる. 交点 (中黒四角) は $\mathcal{H}(p'/q', p/q)$ の軌道点である.

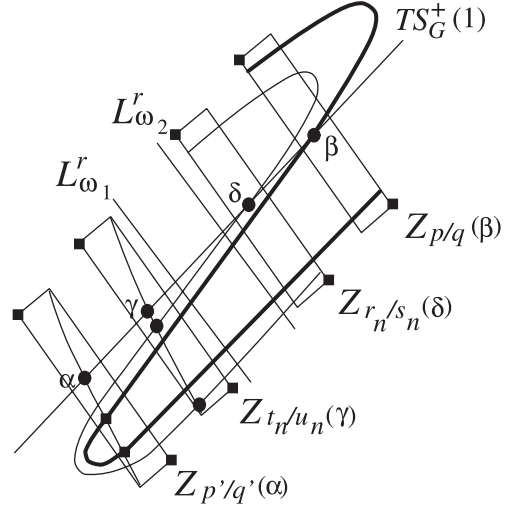


図34: 共鳴領域同士の関係. $Z_{p'/q'}(\alpha)$ 内の中黒四角は p_k/q_k -NBF の存在を意味し, $Z_{t_n/u_n}(\gamma)$ 内の中黒円は $r_n/s_n \oplus t_n/u_n$ -NB の存在を意味する.

および $i' = (q' - 1)/2$ である. 前と同様, $T^j l_{r_n/s_n}(-r_n+1)$ は $T^i l_{p/q}(-p+1)$ と交わることを避けるから, $T^{-j'} l_{t_n/u_n}(u_n+1)$ と交わる. 図34において, 弧 $T^i l_{p/q}(-p+1)$ を太い線で, $T^j l_{r_n/s_n}(-r_n+1)$ を細い線で描いておいた. 2つの弧はZ形をしている. 弧 $T^{-i'} l_{p'/q'}(p'+1)$ は $Z_{p'/q'}(\alpha)$ の対角線であり, $T^{-j'} l_{t_n/u_n}(u_n+1)$ は $Z_{t_n/u_n}(\gamma)$ の対角線である. 黒四角で示した交点は $(r_n+t_n)/(s_n+u_n)$ -NB (つまり $r_n/s_n \oplus t_n/u_n$ -NB) の軌道点である. $n \rightarrow \infty$ の極限で, これらの軌道列は $\omega_2 \oplus \omega_1$ -NMQ, すなわち $\mathcal{H}(\omega_2, \omega_1)$, に集積する. 明らか, $\mathcal{H}(\omega_2, \omega_1)$ の軌道点 $z_n (n \leq 0)$ は Δ_{ω_2} 内にあり, 点 $z_n (n \geq 1)$ は Δ_{ω_1} 内にある. 逆の連結軌道 $\mathcal{H}(\omega_1, \omega_2)$ についても同様に証明できる.

最後に, $\mathcal{H}(\omega_1, \omega_2)$ が非単調であることを示そう. 軌道 $O(\xi_0)$ は Δ_{ω_2} から Δ_{ω_1} へ跳び下り, その前進軌道は Δ_{ω_1} 内にとどまる. その回転数は ω_1 に近い. 軌道点 $z_0 = R^m L_{\omega_2}^l$ は ξ_0 から $2m\pi$ だけずれた点である. ここで R は $R(x, y) = (x + 2\pi, y)$ で定義される「ずらし作用」である. z_0 の後退軌道は Δ_{ω_2} 内にある. 整数 k があって, $z-k = T^{-k} R^m L_{\omega_2}^l$ は $L_{\omega_2}^l$ と $L_{\omega_2}^r$ の間の領域にあり, 関係 $\pi_x(z-k) < \pi_x(\xi_1)$ が満たされる (図35を見よ). 関係式 $m > k > 1, \pi_x(z-k) - \pi_x(\xi_0) < \pi$ および $\pi_x(\xi_1) - \pi_x(z-k) < \pi$ に注意する. 関係 $\omega_2 > \omega_1$ より, 整数 n があって, $\pi_x(\xi_{n+1}) < \pi_x(z-k+n)$ および $k > n > (1/2)/(\omega_2 - \omega_1)$ が成り立つ. これで証明が完結した. (Q.E.D.)

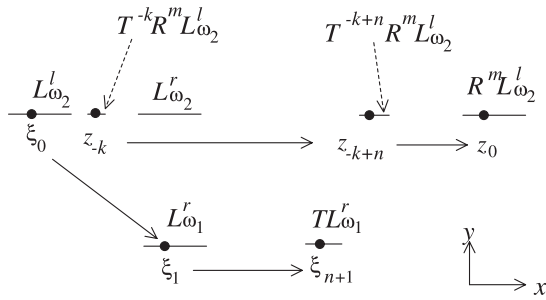


図35：普遍被覆上での軌道 $O(\xi_0)$ と $O(z-k)$ の関係。円筒上では、 ξ_0 と z_0 は同一点である。

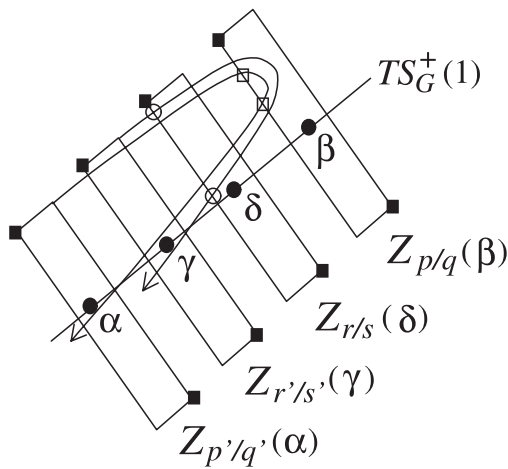


図36： $Z_{p/q}(\beta)$ の境界上四角のは $\mathcal{H}(p'/q', p/q)$ の軌道点である。 $Z_{r/s}(\delta)$ の境界上で中黒円で示した交点は $\mathcal{H}(r'/s', r/s)$ の軌道点である。

(iii) の証明. (i) と (ii) の証明法を使えば, (iii) が証明できる. (Q.E.D.)

バーコフは ω_+ -KAMの ϵ 近傍 $N_\epsilon(\omega_+)$ を ω_- -KAMの ϵ 近傍 $N_\epsilon(\omega_-)$ に結ぶ軌道の存在を証明した. この結果と今回の結果を結び, $N_\epsilon(\omega_\pm)$ と ζ_ω を連結する軌道, および $N_\epsilon(\omega_\pm)$ と p/q -BSを結ぶ軌道が存在する. ただし, $\omega_+ > p/q > \omega_-$ とする.

5.2 定理6の証明

(i) の証明を与える. 証明は同様なので, (ii), (iii), および (iv) の証明は略す.

(i) の証明. $\mathcal{H}(p'/q', p/q)$ が存在するようすを図36に示した. $Z_{p/q}(\beta)$ の境界上の穴空き四角は $\mathcal{H}(p'/q', p/q)$ の軌道点である. 不安定多様体と安定多様体は $Z_{r/s}(\delta)$ の境界上の穴空き円と交わる. これらは $\mathcal{H}(r'/s', r/s)$ の軌道点である. こうして, (i)が証明された. (Q.E.D.)

参考文献

- [1] P. Boyland, *Topology Appl.* **58** (1994), 223.
- [2] M. Bestvina and M. Handel, *Topology* **34**(1995), 109.
- [3] I. Leage and R. S. Mackay, *Phys. Lett. A* **118** (1986), 274.
- [4] P. Boyland and G. R. Hall, *Topology* **26** (1987), 21.
- [5] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **104** (2000), 943.
- [6] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **106** (2001), 691.
- [7] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, *Chaos* **12** (2002), 33.
- [8] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **107** (2002), 1117.
- [9] A. Sharkovskii, *Ukrain. Mat. Z.* **16** (1964), 61.
- [10] P. Boyalnd, *Contemporary Mathematics* **81** (1988), 119 – 133.
- [11] T. Hall, *Trains3*, Software available from http://www.liv.ac.uk/maths/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html/
- [12] T. Matsuoka, *Comtemp. Math.* **152** (1993), 21.
- [13] 松岡 隆 (T. Matsuoka), *物性研究* **67-1**(1996), 1.
- [14] P. Collins, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **12** (2002), 605.
- [15] W. Thurston, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **19** (1988), 417.
- [16] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **117** (2007), 601.
- [17] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **118** (2008), 675.
- [18] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **119** (2008), 533.
- [19] V. Bangert, *Dynamics Reported* **1** (1988), 1.
- [20] A. Bogomolny, <http://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml>
- [21] J. Mather and G. Forni, *Lecture Notes in Math.*, 1589, (Springer, Berlin, 1994), 92.
- [22] J. Mather, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 207.
- [23] S. Aubry and P. LeDaeron, *Phisica* **8D** (1983), 381.
- [24] P. Le Calvez, *Dynamical Properties of Diffeomorphisms of the Annulus and of the Torus*. (AMS, 2000).

- [25] K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. (Springer-Verlag, 1992).
- [26] J. Mather, *Topology* **21** (1982), 457.
- [27] J. D. Meiss, *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992), 795.
- [28] A. Katok, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **2** (1982), 185.
- [29] G. Birkhoff, *Acta. Math.* **43** (1920), 1. Collected Math. Papers, Vol.II, 530.
- [30] V. Kaloshin, *Topics in Dynamics and Ergodic Theory*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series. (Cambridge Univ. Press, 2003). 81.
- [31] J. Xia, Preprint, <http://www.math.northwestern.edu/~xia/preprint/arndiff.ps/>
- [32] A. Delsham, R. de la Llave, & T.M. Seara, Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, **9** (2003), 125.
- [33] A. Katok and B. Hasselbratt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge University Press, 1995).
- [34] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys. Lett.* **120** (2008), 175.
- [35] V. F. Lazutkin, I. G. Schachmannskii and M. B. Tabanov, *Physica D* **40** (1989), 235.
- [36] R. de Vogelaere, in *Contribution to the theory of nonlinear oscillation*, Vol. IV, ed. S. Lefschetz (Princeton University Press, 1958), 53.
- [37] H. Poincaré, *Rend. del. Circ. Math. Palermo*, **33** (1912), 375.
- [38] G. D. Birkhoff, *Tans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), 14; *Acta. Math.* **47** (1925), 297.
- [39] R. S. Mackay and J. D. Meiss, *Phys. Lett.* **98A** (1983), 92.
- [40] J. Palis, *Topology* **8** (1969), 385.
- [41] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000), 1127.
- [42] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems* (Amer. Math. Soc., 1927).
- [43] Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota and K. Tanaka, *Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 98* (1989), 36.
- [44] N. N. Nekhoroshev, *Russ. Math. Surv.* **32** (1977), 1.
- [45] J. Greene, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 1183.
- [46] C. Falcolini and R. de la Llave, *J. Stat. Phys.* **67** (1992), 609.
- [47] S. Chang and A. Yurchenko, *Chinese J. Phys.* **35** (1997), 780.
- [48] Tanikawa, K. and Yamaguchi, Y.: *J. Math. Phys.* **30** (1989), 608.
- [49] MacKay, R.S.: *Renormalization in Area-Preserving Maps* (World Scientific), 1993.
- [50] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000), 1136.

A 各種の準備

A.1 軌道, 対称軸, および周期軌道

本報告の議論の多くは, 円筒の普遍被覆 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上で行なうので, 被覆上での記法を決める必要がある. 点 $\tilde{z} = (\tilde{x}, y) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ の持ち上げを $z = (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ と書く. このように, 普遍被覆上の量の場合は波線を省く.

あらためて, 普遍被覆上の標準写像 T の式を書いておく.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + f(x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + y_{n+1}. \end{aligned} \quad (29)$$

ここで, $f(x) = a \sin x$, a は正のパラメータである. 詳しくは1.1節参照. T は $\tilde{T}$ の一意の持ち上げである. 一般のねじれ写像と違って, 標準写像では回転数ゼロの場所や回転数1の場所が決まっているので, 持ち上げも一意に決まる.

円筒上の標準写像は2つの対合 (ついで) $\tilde{H}$ と $\tilde{G}$ の積の形に書ける [36].

$$\tilde{T} = \tilde{H} \circ \tilde{G}, \quad (30)$$

$\tilde{G}$ と $\tilde{H}$ の作用は次の通りである.

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\tilde{x}, y) &= (-\tilde{x}, y + f(\tilde{x})), \\ \tilde{H}(\tilde{x}, y) &= (y - \tilde{x}, y). \end{aligned} \quad (31)$$

対合に関して不変な点は曲線 (または直線) をなす. その曲線のことを対称軸と呼ぶ. 普遍被覆上では, $\tilde{G}$ および $\tilde{H}$ の持ち上げ G と H の対称軸は

$$\begin{aligned} S_G(k): x &= k\pi, \\ S_H(k): y &= 2(x - k\pi), \end{aligned} \quad (32)$$

で与えられる. ここで $k \in \mathbf{Z}$ である. G と H の作用は次の通りである.

$$\begin{aligned} S_G(k) \text{ を対称軸として } G(x, y) &= (k\pi - x, y + f(x)), \\ S_H(k) \text{ を対称軸として } H(x, y) &= (y - x, y). \end{aligned} \quad (33)$$

$S_G^+(k)$ は $S_G(k)$ の $y > 0$ の部分とする. $S_G^+(k)$ も同様とする. 元の円筒に対応する基本領域 D_F を次のように定義する.

$$D_F = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 2\pi\}. \quad (34)$$

有用な作用素を導入しよう. 第一は $R_{z_0}(x, y)$ であって, 次式で定義される.

$$R_{z_0}(x, y) = (2x_0 - x, 2y_0 - y). \quad (35)$$

ただし $z_0 = (x_0, y_0)$ である. この作用素は z_0 のまわりの 180 度の回転を表す. 集合 A に対しては, $R_{z_0}A$ は z_0 のまわりの集合 (図形) の 180 度の回転を表す. 第二は, x 方向への推移作用素 σ である. $z = (x, y)$ のとき,

$$\sigma z = \sigma(x, y) \equiv (x + 2\pi, y). \quad (36)$$

$n \in \mathbb{Z}$ に対して $\sigma^n(x, y) \equiv (x + 2n\pi, y)$ であることに注意する.

被覆上では, 初期点 z_0 の軌道 $O(z_0)$ は

$$O(z_0) = \{\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots\} \quad (37)$$

である. ただし, $z_k = T^k z_0$ である. 点 z_0 の拡張軌道 $EO(z_0)$ の概念が必要である. すなわち,

$$EO(z_0) = \{T^k z_0 + (2\pi l, 0)\}_{k, l \in \mathbb{Z}}. \quad (38)$$

ときに, 未来の軌道や過去の軌道が必要になる. そこで,

$$O^+(z_0) = \{z_0, z_1, \dots\} \text{ および } O^-(z_0) = \{\dots, z_{-1}, z_0\} \quad (39)$$

を定義する. 前と同様, $z_k = T^k z_0$ である. 未来拡張軌道と過去拡張軌道も

$$\begin{aligned} EO^+(z_0) &= \{T^k z_0 + (2\pi l, 0)\}_{k \in \mathbb{Z}^+, l \in \mathbb{Z}} \\ EO^-(z_0) &= \{T^{-k} z_0 + (2\pi l, 0)\}_{k \in \mathbb{Z}^+, l \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (40)$$

と書く.

点 z が p/q 周期点と呼ばれるのは

$$T^q z - \sigma^p(0, 0) = z \quad (41)$$

のときである. p/q 周期点の軌道は p/q 周期軌道と呼ばれる. この p/q は軌道の回転数である. 本報告では, p は非負の整数, q は正整数とする. つまり, 本論文では非負の回転数のみを考える.

p/q 周期点 z を取る. $T^i z (i = 0, \dots, q-1)$ の 2 点が対称軸上にあれば, この軌道を対称周期軌道と呼ぶ. $S_G^+(k)$ または $S_H^+(k) (k \in \mathbb{Z})$ 上の点を出発する対称 p/q 周期軌道を分類しよう.

定義 A.1.1 (対称周期軌道 [36])

(i) $z \in S_G^+(k_1)$ かつ $T^n z \in S_H(k_2)$ とし, $0 < i < n$ に対して $T^i z$ は対称軸上にないとする. このとき, $O(z)$ の周期は $q = 2n - 1$, 回転数は $p/q = (k_2 - k_1)/(2n - 1)$ である. また $z \in S_H^+(k_1)$ かつ $T^n z \in S_G(k_2)$ とし, $0 < i < n$ に対して $T^i z$ は対称軸上にないとする. このとき, $O(z)$ の周期は $q = 2n + 1$, 回転数は $p/q = (k_2 - k_1)/(2n + 1)$ である.

(ii) $z \in S_G^+(k_1)$ かつ $T^n z \in S_G(k_2)$ とし, $0 < i < n$ に対して $T^i z$ は対称軸上にないとする. このとき, $O(z)$ の周期は $q = 2n$, 回転数は $p/q = (k_2 - k_1)/(2n)$ である. また, $n \geq 2$ として, $z \in S_H^+(k_1)$ かつ $T^n z \in S_H(k_2)$ とし, $0 < i < n$ に対して $T^i z$ は対称軸上にないとする. このとき, $O(z)$ の周期は $q = 2n$, 回転数は $p/q = (k_2 - k_1)/(2n)$ である.

180 度の回転に関する対称性より, 命題 A.1.2 が成り立つ.

命題 A.1.2

(i) p/q 周期軌道 ($0 < p/q < 1$) が点 $(0, y_0) \in S_G(0)$ ($0 < y_0 < 2\pi$) を持てば, $(q-p)/q$ -周期軌道があつて, 点 $(0, 2\pi - y_0) \in S_G(0)$ を持つ.
(ii) p/q 周期軌道 ($0 < p/q < 1$) が点 $(x_0, 2x_0) \in S_H(0)$ ($0 < x_0 < \pi$) を持てば, $(q-p)/q$ 周期軌道が存在して, 点 $(2\pi - x_0, 2\pi - 2x_0) \in S_H(1)$ を持つ.

A.2 バーコフ周期軌道と非バーコフ周期軌道

軌道 $O(z)$ または $EO(z)$ が「単調」と言われるのは, 任意の 2 点 $r, s \in EO(z)$ に対して次が成り立つときである:

$$\pi_x(r) < \pi_x(s) \text{ ならば } \pi_x(Tr) < \pi_x(Ts). \quad (42)$$

ここで, $\pi_x(r)$ は r の x 座標である. 以下では, r の y 座標を $\pi_y(r)$ と書く. 式 (42) を満たさない 2 点 $r, s \in EO(z)$ があるとき, 軌道を非単調軌道と

呼ぶ。軌道が周期的かつ単調のとき、**単調周期軌道**または**バーコフ周期軌道**と呼ぶ。軌道が非単調のとき、**非単調周期軌道**または**非バーコフ周期軌道**と呼ぶ。

加えて、回転数 p/q が与えられているなら、バーコフ周期軌道は p/q バーコフ周期軌道と呼ばれる。それを p/q -B と書くことにする。よく知られているように、標準写像を含む単調ねじれ写像においては、各既約分数 p/q に対して（少なくとも）2つの p/q -B が存在する。これが有名なポアンカレ–バーコフ（Poincaré–Birkhoff）の定理 [37, 38] の内容である。ただし、ポアンカレもバーコフも写像が単調であることは仮定しなかった。標準写像では、2つの対称 p/q -B が既約の各 p/q に対して存在する。その上、 $S_G(1)$ 内に点を持つ対称 p/q -B は作用ミニマックス軌道である [39]。だから、これらはすべて楕円軌道または反転サドル（写像 1 回ごとに近傍が180度回転する）である。 q が偶数なら軌道は $S_G(0)$ に点を持つ。 q が奇数のとき、 $S_G(0)$ に点を持つ p/q -B はサドル軌道である。

標準写像の相図の例を図37に示した。簡単にわかるように、楕円点は $S_G(1)$ にあり、島に囲まれている。作用ミニマックス軌道の各点は共鳴領域（次節参照）内に位置する。同じ回転数のバーコフ周期軌道のサドルと楕円点は、リプシッツ曲線上にならんでいる。

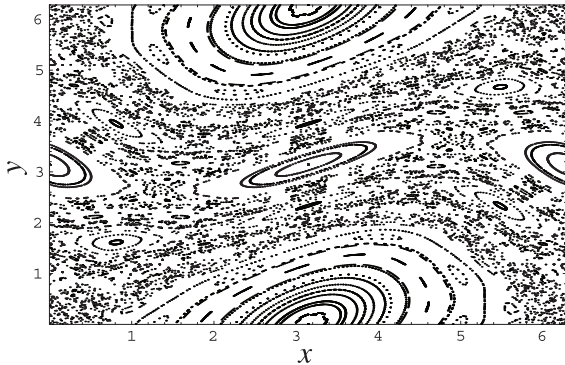


図37: $a = 1$ のときの円筒上での運動。ミニマックス軌道の点は $x = \pi$ 上にある。

A.3 共鳴領域と共鳴鎖

A.3.1 不動点 Q の場合

サドル $P_{0,0} = (0, 0)$ の安定多様体と不安定多様体はそれぞれ2つの分枝を持つ。不安定多様体の分枝のうち、 $W_u^1(P_{0,0})$ は $P_{0,0}$ の右上方向に出るものとし、 $W_u^2(P_{0,0})$ は左下方向に出るものとする。安定多様体の分枝のうち、 $W_s^1(P_{0,0})$ は右下方向から

来るもの、 $W_s^2(P_{0,0})$ は左上から来るものとする。図38に、これらの分枝を描いておいた。記号が混まないように、サドルの名称は省いた。 W_u^1 とあれば $W_u^1(P_{0,0})$ のことである。 $P_{0,0}$ を出発して、 $W_u^1(P_{0,0})$ は $S_G^+(1)$ と u で、次に $S_H^+(1)$ と v で交わる。可逆性より、 $W_s^1(P_{1,0})$ と $W_u^1(P_{0,0})$ は v と u で交わる。すでに述べたように、 u において両者は横断的に交わる [35]。同様の交差は、 u' および v' においても生じる。一般に、1次元多様体 W の閉区間を $[a, b]_W$ と書くことにする。 a と b は端点である。開区間や半开区間も同様に定義する。

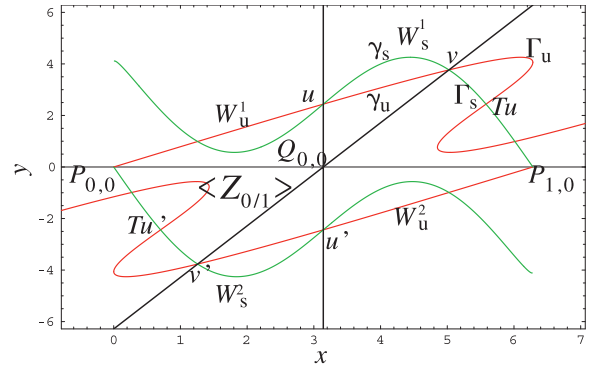


図38：共鳴領域 $\langle Z_{0/1} \rangle$ の定義。 W_u^1 と W_s^2 は $P_{0,0}$ の不安定多様体と安定多様体であり、 W_u^2 と W_s^1 は $P_{1,0}$ の不安定多様体と安定多様体である ($a=2.92$ に設定した)。

弧 $[P_{0,0}, v]_{W_u^1(P_{0,0})}$, $[v, P_{1,0}]_{W_s^1(P_{1,0})}$, $[P_{1,0}, v']_{W_u^2(P_{1,0})}$, および $[v', P_{0,0}]_{W_s^2(P_{0,0})}$ によって囲まれる開領域を $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ と名づける。 $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ を $Q_{0,0}$ の共鳴領域と呼ぶ。次に、ホモクリニックローブを導入しよう。安定多様体の弧と不安定多様体の弧に囲まれた領域をホモクリニックローブと呼ぶ。 $U_{0,0}^u$ は、 $\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u^1(P_{0,0})}$ と $\Gamma_s = [v, Tu]_{W_s^1(P_{1,0})}$ に囲まれた開領域、 $V_{0,0}^u$ は $\gamma_u = [u, v]_{W_u^1(P_{0,0})}$ と $\gamma_s = [u, v]_{W_s^1(P_{1,0})}$ に囲まれた開領域とする。 $U_{0,0}^u$ も $V_{0,0}^u$ もホモクリニックローブである。 $y < 0$ にもホモクリニックローブ $U_{0,0}^d = R_{\pi,0} U_{0,0}^u$ と $V_{0,0}^d = R_{\pi,0} V_{0,0}^u$ がある。

これらの対象物は、普遍被覆上で右に左に、上に下に複写される。相面の構造は、 $2\pi m$ (m は整数) だけの x 方向への平行移動で不変であるばかりでなく、 $2\pi n$ (n は整数) だけの y 方向への平行移動で不変である。安定多様体と不安定多様体の複製を $W_u^1(P_{i,j})$, $W_u^2(P_{i,j})$, $W_s^1(P_{i,j})$, および $W_s^2(P_{i,j})$ と書く。共鳴領域 $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ の複製は $Z_{j/1}(Q_{i,j})$ である。同様に、 $U_{0,0}^u$, $V_{0,0}^u$, $U_{0,0}^d$, および $V_{0,0}^d$ の複製を $U_{i,j}^u$, $V_{i,j}^u$, $U_{i,j}^d$, および $V_{i,j}^d$ と書く。

性質 A.3.1.

- (i) $R_{Q_{0,0}} Z_{0/1}(Q_{0,0}) = Z_{0/1}(Q_{0,0})$.
(ii) $z_0 = (0, \pi)$ に対して $R_{z_0} Z_{1/2}(z_0) = Z_{1/2}(z_0)$.

証明は補遺Aに書いた。

性質 A.3.2. $L \subset S_G(0)$ は $0 \leq y \leq 2\pi$ なる閉弧とする。このとき $z_k = (k\pi, \pi)$ として, $R_{z_k} T^k L = T^k L$ が成り立つ。

証明. 証明は簡単なので, 概略のみを述べる。 $k=0$ のとき, 陳述は自明である。 $R_{z_k} T^k L = T^k L$ [$z_k = (k\pi, \pi)$] が成り立つことを仮定する。その上で, $R_{z_{k+1}} T^{k+1} L = T^{k+1} L$ [$z_{k+1} = ((k+1)\pi, \pi)$] が成り立つことを証明する。(Q.E.D.)

A.3.2 バーコフ周期軌道の場合

既約分数 p/q ($p \geq 0, q > 0$) が与えられたとする。本節では, p/q バーコフ楕円軌道の共鳴領域と共鳴鎖を定義する。その際, p/q バーコフサドル軌道の安定多様体と不安定多様体の弧を使う。 $O(z_0) = \{\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots\}$ は p/q バーコフ楕円軌道であるとする。前と同様 $z_{i+1} = Tz_i$ とする。 $z_0^* = z_0$ として, 拡張軌道を $EO(z_0^*) = \{\dots, z_{-1}^*, z_0^*, z_1^*, \dots\}$ と書く。 $\pi_x(z_i^*) < \pi_x(z_{i+1}^*)$ であるように点を並べておく。同様に, $O(z'_0) = \{\dots, z'_{-1}, z'_0, z'_1, \dots\}$ は p/q バーコフサドル軌道であるとする。 $z'_{i+1} = Tz'_i$ である。 $z'_0 = z'_0$ として, 拡張軌道を $EO(z'_0) = \{\dots, z'_{-1}, z'_0, z'_1, \dots\}$ と書く。ここでも, $\pi_x(z'_i) < \pi_x(z'_{i+1})$ であるように点を並べておく。 z_0 と z'_0 の位置は, あとで q のサイズと偶奇に応じて固定する。はじめに各点 z_i に対して共鳴領域 $Z_{p/q}(z_i)$ を定義し, その後, これらの集まりを共鳴鎖 $\langle Z_{p/q} \rangle = \{Z_{p/q}(z)\}_{z \in EO(z_0)}$ と呼ぶ。すでに共鳴領域 $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ とその複製 $Z_{j/1}(Q_{i,j})$ はA.4節で定義した。鎖 $\langle Z_{0/1} \rangle = \{Z_{0/1}(Q_{i,0})\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を得る。この鎖を y 方向に 2π だけ移動して, $\langle Z_{1/1} \rangle = \{Z_{1/1}(Q_{i,1})\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を得る。

a) q が偶数の場合

任意の偶数 $m \in \mathbb{Z}$ が与えられたとき, z_0 を $S_G(m)$ 上にとる。対応して, z_{-1}^* と z_0^* を $\pi_x(z_{-1}^*) < \pi_x(z_0) < \pi_x(z_0^*)$ なるように取り, z_{-1}^* と z_0^* は z_0 にもっとも近い p/q バーコフサドル点であるように取る。 z_{-1}^* と z_0^* の安定多様体と不安定多様体の弧を使って, 共鳴領域 $Z_{p/q}(z_0)$ を構築する (図39参照。図では $p=1$ かつ $m=0$ の場合を説明している)。このことは前提条件 (I) により可能である。領域 $Z_{p/q}(z_0)$ は曲線四辺形である。2つの頂点は

は z_{-1}^* と z_0^* であり, 残りの2つの頂点は $S_G(m)$ 上にある。 $S_G(m)$ の点が頂点になることは簡単にわかる。 z_{-1}^* や z_0^* の不安定多様体は $S_G(m)$ と交わる。初めて交わる点で, 対称性により安定多様体も交わるからである。曲線四辺形に囲まれたこの領域は G に関して, 自分自身に対称である。すなわち, $GZ_{p/q}(z_0) = Z_{p/q}(z_0)$ である。そこでまず, $Z_{p/q}(z_1) := TZ_{p/q}(z_0) = HGZ_{p/q}(z_0) = HZ_{p/q}(z_0)$ を定義する。次に, $Z_{p/q}(z_{-1}) := T^{-1}Z_{p/q}(z_0) = GHZ_{p/q}(z_0) = GZ_{p/q}(z_1)$ を定義する。 G と H を交互に使ってこの手続きを1周期分繰り返すと, 最後に共鳴領域 $Z_{p/q}(z_{q/2})$ が得られる。

$$\begin{aligned} Z_{p/q}(z_{i+1}) &= HZ_{p/q}(z_{-i}), & (0 \leq i \leq q/2 - 1) \\ Z_{p/q}(z_{-i}) &= GZ_{p/q}(z_i). \end{aligned} \quad (43)$$

1周期分の $Z_{p/q}(z_k)$, ($k = -q/2 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, q/2$) を左右に複製すると各 $r \in EO(z_0)$ に対して $Z_{p/q}(r)$ が得られる。こうして, 共鳴鎖 $\langle Z_{p/q} \rangle = \{Z_{p/q}(r)\}_{r \in EO(z_0)}$ が完成する。相隣り合う共鳴領域は, ある $r' \in EO(z'_0)$ においてつながっている。構築法から明らかなように, 任意の点 $r \in Z_{p/q}(z_{-q/2+1})$ に対して, $T^k r \in Z_{p/q}(z_{-q/2+k+1})$ が $0 \leq k \leq q-1$ のときに成り立つ。

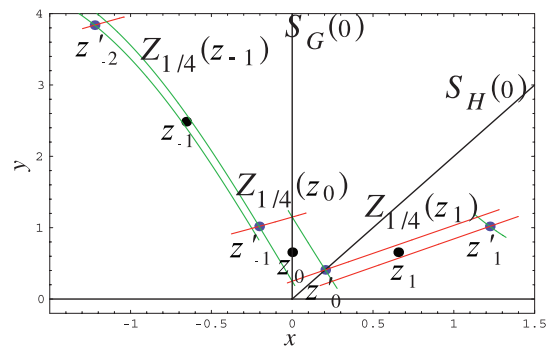


図39：共鳴領域 $\langle Z_{1/4} \rangle$ の構築。 z_{-1}, z_0 , および z_1 はバーコフ楕円点であり, z'_{-2}, z'_{-1}, z'_0 , および z'_1 はバーコフサドルである。

b) q が奇数の場合

任意に偶数 $m \in \mathbb{Z}$ が与えられたとき, z_0 を $S_H(m)$ 上にとる。対応して, z_0^* と z_1^* を $\pi_x(z_0^*) < \pi_x(z_0) < \pi_x(z_1^*)$ と取り, z_0^* と z_1^* が z_0 にもっとも近い p/q バーコフサドル点であるように取る。 z_0^* と z_1^* の安定多様体と不安定多様体を使って, 共鳴領域 $Z_{p/q}(z_0)$ を構築する (図40参照。図では $p=1$ かつ $m=0$ の場合を説明している)。領域 $Z_{p/q}(z_0)$ は曲線四辺形である。2つの相対する頂点は z_0^* と z_1^* であり, 残りの2つの頂点

は $S_H(m)$ 上にある．前と同様， $S_H(m)$ の点が頂点になることは簡単にわかる． z_{-1}^* や z_0^* の不安定多様体は $S_H(m)$ と交わる．初めて交わる点で，対称性により安定多様体も交わるからである．曲線四辺形に囲まれたこの領域は H に関して自分自身に対称である．すなわち， $Z_{p/q}(z_0) = HZ_{p/q}(z_0)$ である．そこでまず， $Z_{p/q}(z_{-1}) := T^{-1}Z_{p/q}(z_0) = GZ_{p/q}(z_0)$ を定義する．次に， $Z_{p/q}(z_1) := TZ_{p/q}(z_0) = HGZ_{p/q}(z_0) = HZ_{p/q}(z_{-1})$ を定義する． G と H を交互に使ってこの手続きを 1 周期分繰り返すと，最後に共鳴領域 $Z_{p/q}(z_{(q-1)/2})$ が得られる．

$$\begin{aligned} Z_{p/q}(z_{-i-1}) &= GZ_{p/q}(z_i), \quad (0 \leq i \leq (q-1)/2 - 1) \\ Z_{p/q}(z_{i+1}) &= HZ_{p/q}(z_{-i-1}). \end{aligned} \quad (44)$$

1 周期分の $Z_{p/q}(z_k)$ ， $(k = -(q-1)/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, (q-1)/2)$ を左右に複製すると各 $r \in EO(z_0)$ に対して $Z_{p/q}(r)$ が得られる．こうして，鎖 $\langle Z_{p/q} \rangle = \{Z_{p/q}(r)\}_{r \in EO(z_0)}$ が得られる．今度の場合も，隣り合う 2 つの共鳴領域はある $r' \in EO(z'_0)$ によってつながっている．前節と同様，任意の点 $r \in Z_{p/q}(z_{-(q-1)/2})$ に対して， $0 \leq k \leq q-1$ として $T^k r \in Z_{p/q}(z_{-(q-1)/2+k})$ が成り立つ．

偶数，奇数の場合に共通する点の振る舞いの重要な性質を命題 A.3.3 としてまとめておく．

命題 A.3.3. 鎖 $\langle Z_{p/q} \rangle$ 内の任意の点は，写像の下で，少なくとも鎖の 1 周期分（つまり，異なる q 個）の共鳴領域に連続してとどまる．

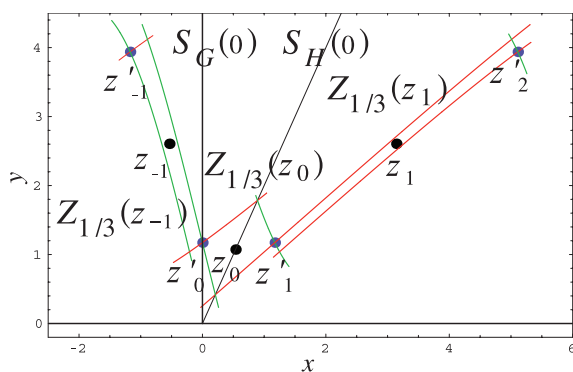


図40：共鳴領域 $\langle Z_{1/3} \rangle$ の構築． z_{-1}, z_0 ，および z_1 は楕円点であり， z_{-1}^*, z_0^*, z_1^* ，および z_2 はサドルである．

A.4 シュテルン-ブロコ樹，ファーレイ分割およびファーレイ区間

シュテルン-ブロコ樹（Stern-Brocot Tree）（SBT）（図41参照）は，ファーレイ区間を表したりNBFの力学順序を表現するのに有用である．以下では， $(0,1)$ 内の既約分数を考える．対応して， $[0/1, 1/1]$ 内のSBTを使う． $0/1$ と $1/1$ をSBTから取り除いたものを，刈り込みシュテルン-ブロコ樹（Trimmed Stern-Brocot Tree）（TSBT）と呼ぶ．TSBTは二分樹である．この樹の根は $1/2$ である．樹に属する分数はノード（節）と呼ばれる．どのノードも親となり得る．親ノードは娘ノードを生じる．階（フロア）の概念を導入する． $1/2$ は 1 階にいる．2 つの分数 $1/3$ と $2/3$ は 2 階にいる．同様に， n 階 ($n=3, 4, \dots$) を定義する．そこには 2^{n-1} 個の分数がある．通りがけ順にノードを訪れる（‘inorder’ traversal）と，TSBT内の分数は，小さい順に並ぶ．「通りがけ順に訪れる」とは，左の部分樹，根，右の部分樹の順に訪れることである．図41では，通りがけ順は $0/1, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 3/8, 2/5, 3/7, 1/2, \dots, 1/1$ である．ただし， $0/1$ と $1/1$ を加えておいた．これでわかるように，SBTにおいては，既約分数間の自然な順序が保存される．

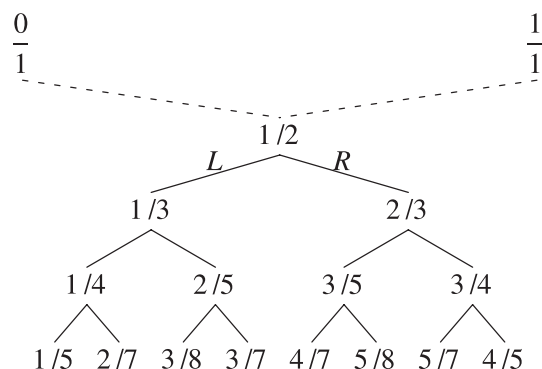


図41：[0/1, 1/1] 間のシュテルン-ブロコ樹． L は左分枝を， R は右分枝を選ぶことを表す．

新たな分数 p/q は既知の p_1/q_1 と p_2/q_2 ($p_1/q_1 < p_2/q_2$) から次のような操作で決まる．

$$p/q = p_1/q_1 \oplus p_2/q_2 = (p_1 + p_2)/(q_1 + q_2) \quad (45)$$

ここで， p_1/q_1 は，SBT内で p/q の階下左， p_2/q_2 は階下右にある（記法が混乱しがちである．定義上は根が下，枝が上であるが，図10では根を上書いた．）．例えば，親 $1/3$ は 2 人の娘 $1/4$ と $2/5$ を持つ．作り方は $1/4 = 0/1 \oplus 1/3$ およ

び $2/5 = 1/3 \oplus 1/2$ である．この規則を用いて，既約分数は順次構成され，TSBTが得られる．

さて， $0 \leq p_1/q_1 < p_2/q_2 \leq 1$ であるとし， p_1/q_1 と p_2/q_2 は SBT に属するとする． $\{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ が p/q の分割と呼ばれのは，式 (45) が満たされるときである． $[p_1/q_1, p_2/q_2]$ は p/q の分割区間と呼ばれる．加えて，ファレー (Farey) 条件

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1 \quad (46)$$

が満たされるとき，分割はファレー分割と呼ばれる．対応して，分割区間もファレー区間と呼ばれる．ここで，ファレー分割およびファレー区間に関する記法をまとめておこう．すなわち，

$$\text{FP}[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}. \quad (47)$$

および

$$\text{FI}[p/q] = [p_1/q_1, p_2/q_2] (p_1/q_1 < p_2/q_2). \quad (48)$$

である．

ファレー分割は一意である． p/q を 2 つの分数に分けるのに，ファレー条件を満たさずに分けることは可能である．こうして，分割 $\{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ が p/q の非ファレー分割であるとは，次の条件が満たされるときである．

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 \geq 2. \quad (49)$$

複数個の非ファレー分割を許す分数 p/q が存在する． p/q の非ファレー分割すべての集合を $\text{NFP}[p/q]$ と書き，非ファレー区間すべての集合を $\text{NFI}[p/q]$ と書くことにする．

ファレー分割および非ファレー分割はよく知られた次の性質を示す．

命題 A.4.1. $p/q \in (0, 1)$ のファレー分割を $\text{FP}[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ とし，任意の非ファレー分割 $\{m_1/n_1, m_2/n_2\} \in \text{NFP}[p/q]$ を取る．このとき，以下の関係が成り立つ．

$$m_1/n_1 < p_1/q_1 < p_2/q_2 < m_2/n_2. \quad (50)$$

ファレー分割 $\text{FP}[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ の行列表示を導入しよう． $[p/q]$ を次式で定義する．

$$[p/q] = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

TSBT を上げるにあたって，各ノードにおいて左の分枝を選ぶ作用素を L ，右の分枝を選ぶ作用素を R とする．この作用素は行列表現を持つ．すなわち，

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

TSBT において， $1/2$ から任意の p/q または無理数に向かう折れ線グラフを道 (path) と呼ぶ．道は，作用素 L と R の列として表現できる．しかも，面白いことに， $[p/q]$ は $[1/2]$ と L, R の列の積の形に書ける．たとえば， $[3/7] = [1/2]LRR$ である．ここで LRR は，はじめに $1/2$ で左の分枝を選び，次に $1/3$ で右の分枝を選び，最後に $2/5$ で右の分枝を選ぶ操作を表す．無理数 $(3 - \sqrt{5})/2$ は $[(3 - \sqrt{5})/2] = [1/2](LR)^\infty$ によって表現される．この L, R の列を使った表現を道の「**LR 表現**」と呼ぶ．以下の命題は，道のある種の性質を述べる．(証明は簡単なので省略する．)

命題 A.4.2.

(i) TSBT 内の無限に長い道を取り，その LR 表現を作る．有理数， m/n ，に道が至るのは， LR 表現の尾が L^∞ または R^∞ の形を取るときである．尾が L^∞ の形をしていれば，道上の分数列 $\{p_i/q_i\}_{i \geq 1}$ は m/n に上から収束する．ここで，添字 i は p_i/q_i の属する階を表す．尾が R^∞ の形をしていれば，分数列 $\{p_i/q_i\}_{i \geq 1}$ は m/n に下から収束する．

(ii) LR 表現の尾が L^∞ でも R^∞ でもないとき，道は無理数に収束する．

道はノードの列，すなわち，分数列として表現できる．道と分数列を同一視する．道 $\{p_i/q_i\}$ が与えられたとする．ある n に対して，3 つの相続く分数 p_{n-1}/q_{n-1} ， p_n/q_n ，および p_{n+1}/q_{n+1} があって $p_{n-1}/q_{n-1} > p_n/q_n$ かつ $p_n/q_n < p_{n+1}/q_{n+1}$ のとき，この道は p_n/q_n で **LR 転回** と言われる．しばしば， p_n/q_n を **LR 転回分数** と呼ぶ．同様に，ある n に対して，3 つの相続く分数 p_{n-1}/q_{n-1} ， p_n/q_n ，および p_{n+1}/q_{n+1} があって $p_{n-1}/q_{n-1} < p_n/q_n$ かつ $p_n/q_n > p_{n+1}/q_{n+1}$ を満たすとき，道は p_n/q_n で **RL 転回** と言われる． p_n/q_n を **RL 転回分数** と呼ぶ．無理数に向かう道には無限に多くの LR 転回と RL 転回がある．これらの転回数が有限なら， LR

表現の尾は R^∞ または L^∞ であるから、道は有理数に収束する。

$1/2$ から出発して無理数 ω に至る道 $\{p_i/q_i\}$ 内に、 k 番目の LR 転回と k 番目の RL 転回を導入する。 p_{m_k}/q_{m_k} が k 番目の LR 転回の転回分数であるとし、 p_{n_k}/q_{n_k} が k 番目の RL 転回の転回分数であるとする。 $\{p_{m_k}/q_{m_k}\}$ も $\{p_{n_k}/q_{n_k}\}$ も $\{p_i/q_i\}$ の部分列である。以下の関係が成り立つ。

$$\frac{p_{m_1}}{q_{m_1}} < \frac{p_{m_2}}{q_{m_2}} < \dots < \omega < \dots < \frac{p_{n_2}}{q_{n_2}} < \frac{p_{n_1}}{q_{n_1}}, \quad (53)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{m_k}}{q_{m_k}} = \omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}. \quad (54)$$

式 (53) と (54) は、道が ω の周りで振動しながら ω に収束することを意味する。

A.5 ファーレイ型対称非バーコフ周期軌道とその極限軌道

既約の $0 < p/q < 1/2$ に対して p/q バーコフ軌道の共鳴領域と共鳴鎖をA.3節で定義した、本節では、この共鳴領域と共鳴鎖を本質的に使って、ファーレイ型対称非バーコフ周期軌道を定義する。

定義A.5.1. TSBT内の分数 p/q を取る。また p_1/q_1 と p_2/q_2 は $0 \leq p_1/q_1 < p_2/q_2 \leq 1$, $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$, および $p_2 q_1 - p_1 q_2 \geq 1$ を満たすとする。対称 p/q 周期軌道がちょうど一つの軌道点を $\langle Z_{p_1/q_1} \rangle$ および $\langle Z_{p_2/q_2} \rangle$ の各共鳴領域に持つとする。この軌道を **2共鳴鎖-対称 p/q 非バーコフ周期軌道** と呼び、 p/q -NB2C または $p_1/q_1 \oplus p_2/q_2$ -

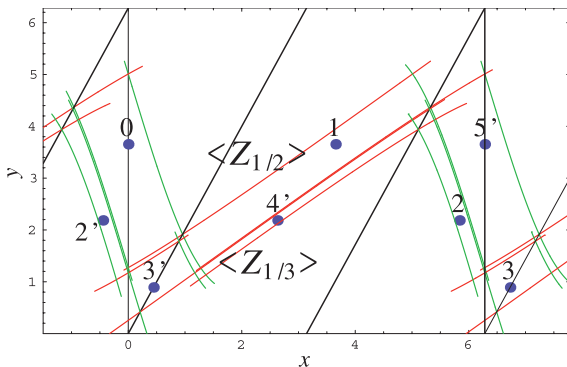


図4.2: ファーレイ型対称非バーコフ周期軌道 $2/5$ -NBF. 数字 i は η_i のことである。円筒上で、 η_2 と η'_2 は同一点である。普遍被覆では、軌道 $\dots \Rightarrow \eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \eta_2 \Rightarrow \eta_3 \Rightarrow \dots$ は軌道 $\dots \Rightarrow \eta'_2 \Rightarrow \eta'_3 \Rightarrow \eta'_4 \Rightarrow \eta'_5 \Rightarrow \dots$ とは異なる。

NB2C と書く。

$p_1/q_1 \oplus p_2/q_2$ -NB2C が、 $p_2 q_1 - p_1 q_2 \geq 1$ の代わりに $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$ を満たすとき、すなわち、 $FP[p/q] = \{p_1/q_1, p_2/q_2\}$ のとき、この軌道を**ファーレイ型対称 $p_1/q_1 \oplus p_2/q_2$ -非バーコフ周期軌道** と呼び、 p/q -NBF または $p_1/q_1 \oplus p_2/q_2$ -NBF と記す。

NBFの数値例を示そう。はじめに、 $2/5$ -NBF を図4.2に示した。 $\eta_0 \in S_G^+(0)$, $\eta_3 \in S_H^+(2)$, $\eta'_3 \in S_H^+(0)$, および $\eta'_5 \in S_G^+(2)$ である。関係 $\pi_x(\eta'_4) < \pi_x(\eta_1)$ および $\pi_x(\eta'_5) > \pi_x(\eta_2)$, より、この軌道は非バーコフである。円筒へ射影された軌道は、 $\langle Z_{1/2} \rangle$ と $\langle Z_{1/3} \rangle$ の各共鳴領域に一点ずつ持つ。

$p/q \oplus p'/q'$ -NBFは回転数 $(p+p')/(q+q')$ の非バーコフ周期軌道である。TSBTにおいて $p', q' \rightarrow \infty$ とする。このとき、形式的には $q+q' \rightarrow q+\infty$ である。極限は準周期軌道に対応する。 $p'/q' \rightarrow \omega$ として、この準周期軌道を、それが存在するとして、 $\frac{p}{q} \oplus \omega$ -NMQ と記す。軌道は非単調である。準周期軌道 $\omega \oplus \frac{p}{q}$ -NMQ も同様に定義する。

A.6 不安定ゾーン

$a_c(\omega)$ は、回転数 ω のKAM曲線 (ω -KAM) が崩壊する臨界パラメータ値であるとする。よく知られているように、 $a > a_c(\omega)$ のとき、回転数 ω のオーブリー-マザー集合 (ω -AM) $\Sigma_\omega^{\text{rec}}$ が ω -KAMの代わりに存在する。この ω -AMは、リブシッツ曲線 (ζ_ω と呼ぼう) のグラフ上に存在する。ただし、その像 $T\zeta_\omega$ はグラフにならない。このとき、 ζ_ω を内部に含むような不安定ゾーン [29] が存在する。この不安定ゾーンの下境界は ζ_ω より下にあり、上境界は ζ_ω より上にある。この2つの境界は、(標準写像の場合)、回転数 ω -および ω_+ -KAM曲線である。これらを ω -KAMおよび ω_+ -KAMと呼ぶ。ただし、 $\omega \rightarrow -\infty$ または $\omega_+ \rightarrow +\infty$ の場合も許す。そしてこの不安定ゾーンを $Z(\omega_-, \omega_+)$ と記す。

p/q -NBFが $Z(\omega_-, \omega_+)$ 内にあれば、以下の関係が成り立つ。

$$\omega_- < p^l/q^l < p/q < p^r/q^r < \omega_+. \quad (55)$$

ここで p/q のファーレイ分割は $FP[p/q] = \{p^l/q^l, p^r/q^r\}$ である。逆に、 p/q -NBFが存在すれば、回転区間 $[p^l/q^l, p^r/q^r]$ にはKAM曲線が存在しない。だから、関係 (55) を満たす不安定ゾーン $Z(\omega_-$,

ω_+)が存在する.

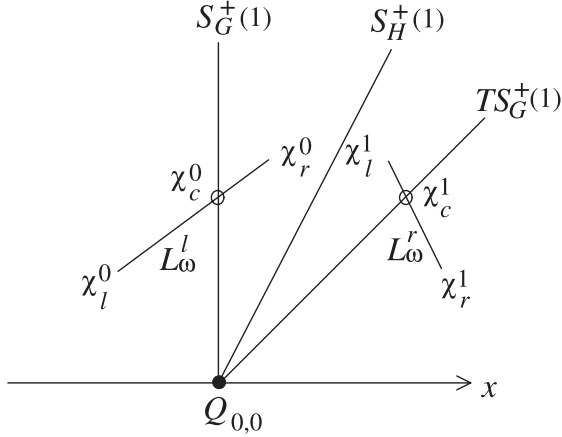


図43: L_ω^r と $L_\omega^l=HL_\omega^r$ の配置, $\chi_l^1=T\chi_l^0$, $\chi_c^1=T\chi_c^0$, および $\chi_r^1=T\chi_r^0$ である.

A.7 AM集合の乗るリプシッツ曲線

$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n$ を無理数回転数とする. ただし, p_n/q_n はTSBTの n 階の要素とし, 分数列 $\{p_n/q_n\}$ ($n \geq 1$) はTSBT内で ω への道であるとする. ζ_ω , L_ω^r , および L_ω^l を以下のように定義する (図50と図43参照).

$$\zeta_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Z_{p_n/q_n} \rangle \quad (56)$$

および

$$L_\omega^r = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{p_n/q_n}(\delta^n), \quad L_\omega^l = HL_\omega^r. \quad (57)$$

ここで, $\delta^n \in TS_G^+(1)$ は p_n/q_n -BEの軌道点である. $TS_G^+(1)$ と L_ω^r の交差点を χ_c^1 と名付ける. また L_ω^r の左の端点を χ_l^1 , 右の端点を χ_r^1 とする. 対応して, $\chi_l^0 = T^{-1}\chi_l^1$, $\chi_c^0 = T^{-1}\chi_c^1$, および $\chi_r^0 = T^{-1}\chi_r^1$ を定義する. 前提条件 (II) より, $\zeta_\omega = \{EO^+(z): z \in L_\omega^r\} \cup \{EO^-(z): z \in L_\omega^l\}$ が成り立つ. AM集合 $\Sigma_\omega^{\text{rec}}$ の間隙 Δ_ω を次式で定義する.

$$\Delta_\omega = \zeta_\omega \setminus \Sigma_\omega^{\text{rec}}. \quad (58)$$

Δ_ω は $O(\chi_c^0)$ を含む. この軌道は作用がミニマックスであって, ω -AMの端点にホモクリニックである [33].

ζ_ω の性質に興味がある. $T\langle Z_{p_n/q_n} \rangle \neq \langle Z_{p_n/q_n} \rangle$ であることに注意する. この事実は共鳴領域および共鳴鎖の構築手続きから明らかである. たとえば, $TZ_{1/2}(z_0) = Z_{1/2}(z_1)$ であるが, $TZ_{1/2}(z_1) \neq Z_{1/2}(z_2)$ である. ただし, $z_0 \in S_G^+(0)$, $z_1 \in S_G^+(1)$, および $z_2 \in S_G^+(2)$ は $1/2$ -BEの軌道点である. 一方, 関係 $H\langle Z_{p_n/q_n} \rangle = \langle Z_{p_n/q_n} \rangle$ が成り立つ. $T\zeta_\omega = \zeta_\omega$ な

ら, ζ_ω は不変曲線である. これが, いわゆるKAM曲線である (ω -KAM). 条件 $T\zeta_\omega = \zeta_\omega$ は同様な関係式に書き換えることができる. すなわち, $TL_\omega^l = L_\omega^r$ または $GL_\omega^l = L_\omega^r$ である. だから, $TL_\omega^l \neq L_\omega^r$ なら, ω -KAMは不在である.

ここで, ω -KAM上の点が写像の下でどのように動くかをまとめておこう. とくに, KAM曲線の段階で, 曲線内に異なる型の運動が共存していることを確認し, KAM曲線が崩壊してAM集合に変身したときにその違いが目に見えるようになることを確認しよう.

ω -KAMが乗っている曲線は円筒を巻く円周 S^1 にホモトープである. したがって, 軌道は円写像 $\hat{\tau}$ によって表現できる. ここで, $\hat{\tau}$ は S^1 への T の制限である. ポアンカレの定理 [33] は, S^1 上の無理数回転数の軌道を以下のように分類する.

I型: S^1 で稠密な単調軌道.

II型: カントール集合内で稠密な単調軌道.

III型: カントール集合にホモクリニックな単調軌道.

ω -KAMが存在する場合を考える. $\hat{L}_\omega^l = L_\omega^l \setminus \{\chi_l^0, \chi_c^0, \chi_r^0\}$ とする. $T^{-k}\hat{L}_\omega^l$ は k を大きくするとどんどん短くなり, $k \rightarrow \infty$ のとき長さはゼロになる. そして $T^{-k}\hat{L}_\omega^l$ と $T^{-k'}\hat{L}_\omega^l$ ($k \neq k'$)を円筒上に射影すると重ならない. 任意に $\eta_0 \in \hat{L}_\omega^l$ を取ると, $T^{-k}\eta_0$ は $k \rightarrow \infty$ のとき, 端点 χ_l^0 および χ_r^0 の過去像に漸近する. 次に $\hat{L}_\omega^r = L_\omega^r \setminus \{\chi_l^1, \chi_c^1, \chi_r^1\}$ とする. $T^k\hat{L}_\omega^r$ は k を大きくするとどんどん短くなり, $k \rightarrow \infty$ のとき長さはゼロになる. そして $T^k\hat{L}_\omega^r$ と $T^{k'}\hat{L}_\omega^r$ ($k \neq k'$)を円筒上に射影すると重ならない. 任意に $\eta_0 \in \hat{L}_\omega^r$ を取ると, $T^k\eta_0$ は $k \rightarrow \infty$ のとき, 端点 χ_l^1 および χ_r^1 の過去像に漸近する. $T\hat{L}_\omega^l = \hat{L}_\omega^r$, $\chi_l^1 = T\chi_l^0$, $\chi_c^1 = T\chi_c^0$, および $\chi_r^1 = T\chi_r^0$ であるから, $T\hat{L}_\omega^l = \hat{L}_\omega^r$ の点は, 準周期でありながら, 端点の像へホモクリニックである. よって, I型であり, かつIII型である. ω -KAM内では, I型とIII型が縮退している.

カトックとハッセルブラット (Katok & Hasselblatt) は教科書 [33, p.427] において, 円筒を巻く不変曲線の中に, オーブリー・マザー集合が部分集合として隠れていないものだろうかという疑問を提出する. 上に述べたことからすると, オーブリー・マザー集合となるべきカントール集合が隠れている. $S^1 \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k \hat{L}_\omega^l$ がそれである.

次に, ω -KAM崩壊後の軌道の振る舞いについて考察する. k を大きくしたときの $T^{-k}\hat{L}_\omega^l$ の振る

舞い, および $T^k \hat{L}_\omega^r$ の振る舞いは, ω -KAM が存在する場合と同様である. $\chi_l^1 = T\chi_l^0$, $\chi_c^1 = T\chi_c^0$, および $\chi_r^1 = T\chi_r^0$ は成り立つが, $TL_\omega^l \neq \hat{L}_\omega^l$ である. このため, $\hat{L}_\omega^l$ と $\hat{L}_\omega^r$ は準周期的でなくなる. $\hat{L}_\omega^l$ のほとんどの点の「過去」回転数は定義できない. $\hat{L}_\omega^l$ のほとんどすべての点の「未来」回転数は定義できない. $T^{-k} \hat{L}_\omega^l$ と $T^k \hat{L}_\omega^r$ はカントール集合を作る際に取り除く区間となる. 端点の軌道 $O(\chi_l^0)$ と $O(\chi_r^0)$ はカントール集合に含まれる. すなわち, ω -AM に含まれる. これは II 型の軌道である. 一方, $O(\chi_c^0)$ はカントール集合にホモクリニックな単調軌道である. つまり III 型の軌道である.

まとめると, ω -KAM の崩壊後, 縮退が解け, I 型が消滅して II 型と III 型が生き残る. このために, 連続曲線がカントール集合へと突然変化する. ただし, 突然の変化は ω -KAM の段階で用意されている. II 型と III 型は S^1 内にある. 縮退が解けることにより, 回転ドア構造が現われる (図 44 参照). 回転ドアは, 弧 TL_ω^l と弧 L_ω^r で構成される. L_ω^r の上の膨らみの面積は, ζ_ω を通過して下から上に流れる流量を示す.

ζ_ω の性質を命題の形で述べておこう. ただし, H の対称軸を $S_H(1)$ とする.

性質 A.7.1 ζ_ω に関する以下の性質が, ω -KAM 崩壊後に成り立つ.

- (i) $T\zeta_\omega \neq \zeta_\omega$.
- (ii) 軌道 $O(\chi_l^0)$, $O(\chi_c^0)$ と $O(\chi_r^0)$ は ζ_ω 内にある. ここで $\{\chi_l^0, \chi_c^0, \chi_r^0\} \subset L_\omega^l \subset \zeta_\omega$.
- (iii) z が $L_\omega^l \setminus \{\chi_l^0, \chi_c^0, \chi_r^0\}$ 内であれば, z の過去軌道は ζ_ω 内にある. z が $L_\omega^r \setminus \{\chi_l^1, \chi_c^1, \chi_r^1\}$ 内であれば, z の未来軌道は ζ_ω 内にある.
- (iv) $\omega_- < p/q < \omega_+$ および $\omega_- < \omega < \omega_+$ に対して, 関係 $\zeta_\omega \cap \langle Z_{p/q} \rangle = \emptyset$ が成り立つ. $\omega_- < \omega < \omega' < \omega_+$

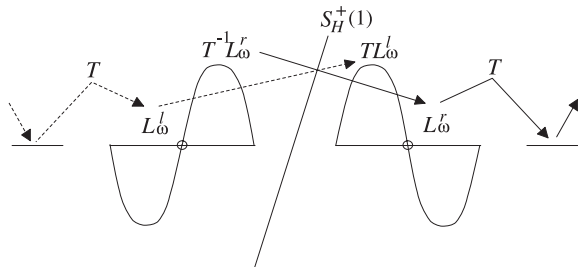


図 44: L_ω^r の前進像と $L_\omega^l (= H L_\omega^r)$ の後退像が円筒を巻く円周に埋め込まれている. 回転ドア構造は弧 TL_ω^l と L_ω^r で形成する.

に対して, 関係 $\zeta_\omega \cap \zeta_{\omega'} = \emptyset$ が成り立つ.

A.8 出会いの場

本論文では, 普遍被覆上, $x < \pi$ にある対称軸を前方に写像し, $x \geq 2\pi$ にある対称軸を後方に写像して, ある「出会いの場」で共通部分をとる, という作業をしばしば行う. その「出会いの場」を導入する.

A.8.1 $a \geq a^*$ の場合

定理 1 の証明に使うヘテロクリニック接触の状況を説明しよう. 図 45 を見てほしい. γ_s と $W_u^2(P_{1,1})$ は互いに接している. また Γ_u と $W_s^2(P_{1,1})$ も互いに接しており, Γ'_u と $W_s^1(P_{1,0})$ も互いに接している. 弧 $\gamma_{u,s}$ と弧 $\Gamma_{u,s}$ は A.3.1 節で定義した. 図 2 も参照せよ. この状況で, Γ_u と $S_G^+(2)$ は交差し, Γ'_u と $S_G^+(2)$ も交差している. これは $a = a^* = 3.36\dots$ のときに生じる. 図 45 に示される 2 次関数接触が, ある特定のパラメータのときに実現することは参考文献 [7] の II 節で議論されている.

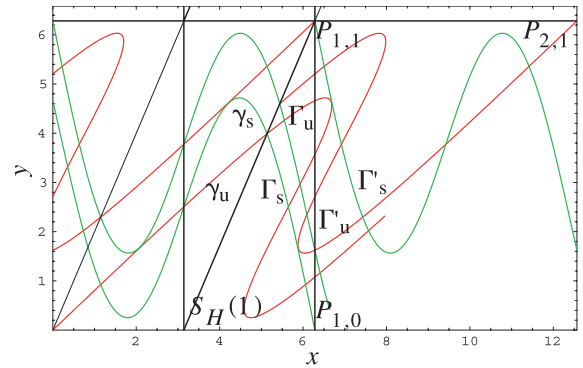


図 45: 定理 1 の証明に使われるヘテロクリニック接触. この状況は $a = a^* = 3.36\dots$ のときに現われる.

まず, $a = a^*$ における, 安定および不安定多様体の分枝の間の各種交差点や接触点を定義しよう (図 45 と図 46 参照). 不安定多様体 $W_u^1(P_{0,0})$ は順に, $W_s^2(P_{0,1})$ と δ で接し, $S_G^+(1)$ と α で交わり (これは図 38 の点 u である), $S_H^+(1)$ と ϵ で交わり (これは図 38 の点 v である), $W_s^2(P_{1,1})$ に β' で接し, $W_s^1(P_{1,0})$ と α' で交わる. 不安定多様体 $W_u^2(P_{1,1})$ は順に, $W_s^1(P_{1,0})$ に β で接し, $W_s^2(P_{0,1})$ と γ で交わる. 不安定多様体 $W_u^2(P_{2,1})$ も順に, $W_s^2(P_{1,1})$ と α'' で交わり, $W_s^1(P_{1,0})$ に δ' で接し, $W_s^2(P_{1,1})$ と γ' で交わる. 最後に, 不安定多様体 $W_u^1(P_{1,0})$ は $W_s^2(P_{1,1})$ に δ'' で接する.

次に, 上で導入した点を使って, 領域 $D_1, D_2,$

D_3 , および D_4 を定義する. D_1^l は $[\gamma, \delta]_{W_s^2(P_{0,1})}$, $[\delta, \alpha]_{W_u^1(P_{0,0})}$, および $[\alpha, \gamma]_{S_G^+(1)}$ に囲まれる開領域とする. D_1^l は, $[\alpha, \beta]_{W_s^1(P_{1,0})}$, $[\beta, \gamma]_{W_u^2(P_{1,1})}$, および $[\gamma, \alpha]_{S_G^+(1)}$ に囲まれる開領域とする. $D_1 = D_1^l \cup D_1^r$ とする. 同様に, D_2^l は $[\beta', \alpha']_{W_u^1(P_{0,0})}$, $[\alpha', \gamma']_{TS_G^+(1)}$, および $[\gamma', \beta']_{W_s^2(P_{1,1})}$ に囲まれる開領域とする. D_2^r は, $[\delta', \gamma']_{W_u^2(P_{2,1})}$, $[\gamma', \alpha']_{TS_G^+(1)}$, および $[\alpha', \delta']_{W_s^1(P_{1,0})}$ に囲まれる開領域とする. $D_2 = D_2^l \cup D_2^r$ とする. D_3^l は, $[P_{1,1}, \beta]_{W_u^2(P_{1,1})}$, $[\beta, \epsilon]_{W_s^1(P_{1,0})}$, および $[\epsilon, P_{1,1}]_{S_H^+(1)}$ に囲まれる開領域とする. D_3^r は, $[\epsilon, \beta']_{W_u^1(P_{0,0})}$, $[\beta', P_{1,1}]_{W_s^2(P_{1,1})}$, および $[P_{1,1}, \epsilon]_{S_H^+(1)}$ に囲まれる開領域とする. $D_3 = D_3^l \cup D_3^r$ とする. 最後に, D_4^l は, $[P_{1,0}, \alpha'']_{S_H^+(2)}$, $[\alpha'', \delta']_{W_u^2(P_{2,1})}$, および $[\delta', P_{1,0}]_{W_s^1(P_{1,0})}$ に囲まれる開領域とし, D_4^r は, $[P_{1,1}, \delta'']_{W_u^1(P_{0,0})}$, $[\delta'', \alpha'']_{W_s^2(P_{1,1})}$, および $[\alpha'', P_{1,1}]_{S_H^+(2)}$ に囲まれる開領域とする. $D_4 = D_4^l \cup D_4^r$ とおく.

上記の点や領域は, 多くの対称関係で結び付いている. $S_H(1)$ を H の対称軸として, $D_2 = HD_1$ および $D_3 = HD_3$ が成り立つ. $D_4 = R_{2\pi, \pi} D_3$ が成り立つ. 点に関しては, $\gamma = R_{\pi, \pi} \alpha$ および $\delta = R_{\pi, \pi} \beta$ が成り立つ. また, $\alpha' = H\alpha$, $\beta' = H\beta$, $\delta' = H\delta$, および $\gamma' = H\gamma$ が成り立つ. $\gamma' = T\gamma$ および $\alpha' = T\alpha$ であることを注意しておく. $\alpha'' = R_{2\pi, \pi} \epsilon$ および $\delta'' = R_{2\pi, \pi} \beta$ が成り立つ. また $\delta'' = \delta + (2\pi, 0)$ である.

さて, $[P_{0,0}, \alpha]_{W_u^1(P_{0,0})}$ のグラフの傾きは正であって, 2階微分は負である [41]. 対称関係 $[P_{1,1}, \gamma]_{W_u^2(P_{1,1})} = R_{\pi, \pi} [P_{0,0}, \alpha]_{W_u^1(P_{0,0})}$ より, $[P_{1,1}, \gamma]_{W_u^2(P_{1,1})}$ のグラフの傾きは正であって, 2階微分は正である. $[\alpha, P_{1,0}]_{W_s^1(P_{1,0})}$ のグラフの2階微分は負, $[\gamma, P_{0,1}]_{W_s^2(P_{0,1})}$ のグラフの2階微分は正である. これらの事実から, D_1 内の x 座標最大の点は β であり, 最小の点は δ である.

$a > a^*$ では, 点 β , δ , β' , δ' , および δ'' はそれぞれ2つの点に分岐している. 点 β の場合, 2点を β^* および β^{**} とし, $\pi_x(\beta^*) < \pi_x(\beta^{**})$ と選ぶ. 他の点の場合も同様にする. すると, $a > a^*$ のとき, D_1 を構成する頂点は, α , β^* , γ , および δ^{**} であり, D_2 の場合は α' , β'^* , γ' , および δ'^* , D_3 の場合は $P_{1,1}$, β^{**} , ϵ , および β'^* , D_4 の場合は $P_{1,0}$, δ'^* , α'' , および δ'^* である.

後の節で, p/q バーコフ周期点 $z \in (\alpha', \gamma')_{TS_G^+(1)}$ の共鳴領域 $\langle Z_{p/q}(z) \rangle$ をしばしば考察の対象にする. $0 < p/q < 1$ なる p/q バーコフ軌道のすべての点は, $(\alpha', \gamma')_{TS_G^+(1)}$ 内の点およびその像を除いて, $\text{clos}(D_3)$, $\text{clos}(D_4)$, およびその過去・未来への像内にある. z にもっとも近くて右にあるサドルは $\text{clos}(D_4^r)$ 内にある. もっとも近くて左にあ

るサドルは $\text{clos}(D_3^r)$ 内にある. だから, $\langle Z_{p/q}(z) \rangle$ は曲線四辺形であって, その短い辺は D_3 内と D_4 内にある.

$a = a^*$ のときに, 共鳴鎖 $\langle Z_{p/q} \rangle$ を既約な分数 p/q すべてに対して構築する. 共鳴領域 $Z_{p/q}(\zeta)$ と $T^m Z_{p/q}(z_m)$ が, 図47(a)に示されるように交わったとする. a の値を a^* から減らしていく. $Z_{p/q}(\zeta)$ と $T^m Z_{p/q}(z_m)$ の交わりは, 図47(b)に示されるような仕方で消滅する. 交点の消滅は図47(c)のようには生じない. なぜなら, (c)のようになると, サドルが別のサドルの不安定多様体とあるパラメータ値のときに衝突してしまうからである.

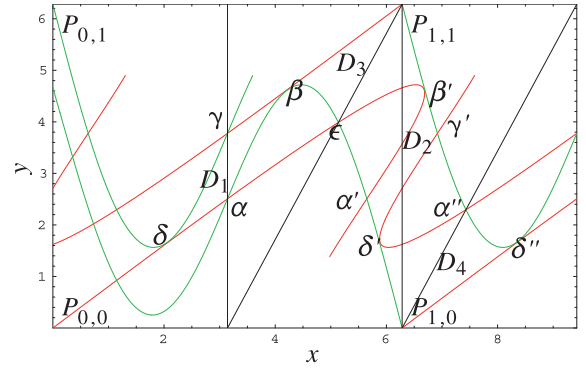


図46：4つの領域 D_i ($i = 1, \dots, 4$) の定義.

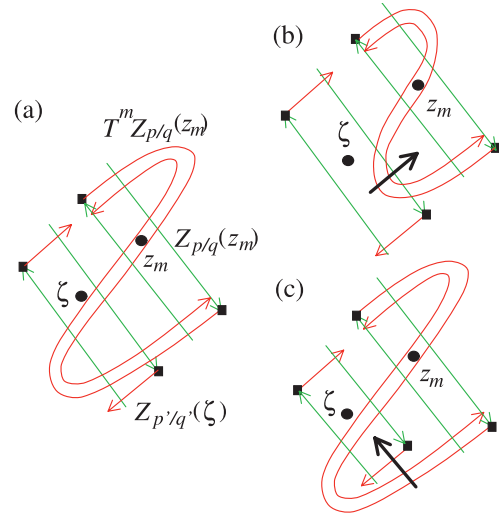


図47： $Z_{p/q}(\zeta)$ と $T^m Z_{p/q}(z_m)$ の分離は(c)のようではなく, (b)のように生じる.

出会いの場合は $\text{clos}(D_2 \cup D_3 \cup D_4)$ である.

命題 A.8.1. 異なる回転数の共鳴領域は, 出会いの場合の中で, 回転数の大ききの順に並んでいる. すなわち, 大きな回転数の共鳴領域は, 小さいな

回転数の共鳴領域より上にある (図1 参照). 各共鳴領域の短い辺のひとつは D_3 にあり, もうひとつは D_4 にある (D_3 と D_4 に関しては2.7節参照).

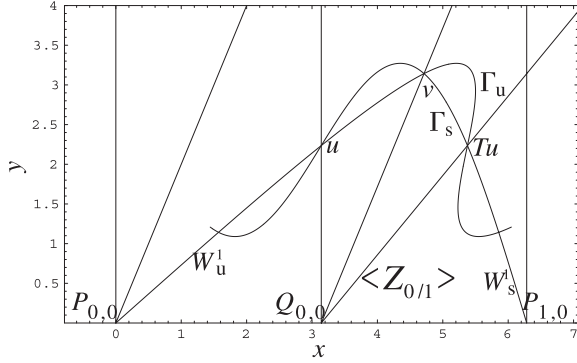


図48: $P_{0,0}$ の不安定多様体 $W_u^1(P_{0,0})$ と $P_{1,0}$ の安定多様体 $W_s^1(P_{1,0})$ の絡み合い. 図で, W_u^1 と W_s^1 は $W_u^1(P_{0,0})$ と $W_s^1(P_{1,0})$ の略記号である. 対称軸 $S_G^+(0)$, $S_G^+(1)$, $S_G^+(2)$, $S_H^+(0)$, および $S_H^+(1)$ を書き込んだ. $T^+S_G(1)$ も加えた.

A.8.2 $a < a^*$ の場合

この場合, Γ_u は $P_{1,1}$ の安定多様体の分枝 $W_s^2(P_{1,1})$ に接するまで伸びていない (図48). 分枝 $W_u^1(P_{0,0})$ は $S_G^+(1)$ と u で, また $S_H^+(1)$ と v で交わる. これらの点において, $W_s^1(P_{1,0})$ は $W_u^1(P_{0,0})$ と交わる. パラメータ a を上げていくと, 中央で折り畳まれた弧 $\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u^1(P_{0,0})}$ の中央部分は, 右上方向に伸びていく. 弧 $\Gamma_s = [v, Tu]_{W_s^1(P_{1,0})}$ も図48に示した. Γ_u と Γ_s を含む領域は図49に示した. 図49において, Γ_u は共鳴領域 $Z_{1/3}(\alpha)$ を貫き, $Z_{1/2}(\beta)$ に入り込む. ここで β は $1/2$ -BEの軌道点であり, α は $1/3$ -BEの軌道点である. 以下では, $TS_G^+(1)$ と交わる共鳴領域を考える (図50参照).

$1/2$ から ω に向かう道 $\{p_i/q_i\}_{i \geq 1}$ が存在するとし, ある $k \geq 1$ に対して pk/qk -NBFが $Z(\omega_-, \omega_+)$ 内に存在するとする. pk/qk の ファーレイ区間は $FI[p_k/q_k] = [p^l/q^l, p^r/q^r]$ である. 関係 $\omega_- < p^l/q^l < \omega < p^r/q^r < \omega_+$ が成り立つ. 共鳴領域 $Z_{p_n/q_n}(\delta^n)$ として $\omega < p_n/q_n < p^r/q^r$ かつ $n > k$ なるものを取る. $\delta^n \in TS_G^+(1)$ は p_n/q_n -BEの軌道点であるとする. 図50において, $Z_{p_{m_k}/q_{m_k}}(\gamma)$ は γ の共鳴領域である. ただし, γ は p_{m_k}/q_{m_k} -BE の軌道点である. p_{m_k}/q_{m_k} は, 道 $\{p_i/q_i\}_{i \geq 1}$ の m_k 番目の LR 転回点であり, $\omega_- < p_{m_k}/q_{m_k} < \omega$ を満たす.

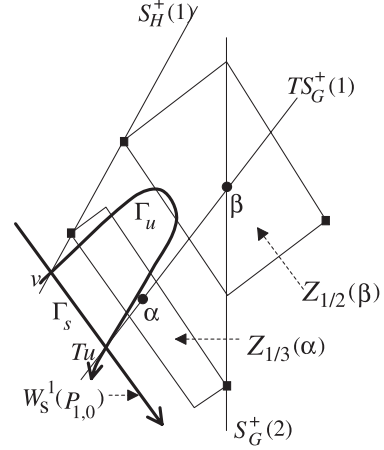


図49: Γ_u , Γ_s 周辺の相構造の模式図. 2つの共鳴領域 $Z_{1/2}(\alpha)$ と $Z_{1/3}(\beta)$ を示した. また点 α と β は $TS_G^+(1)$ 場のバーコフ楕円点である. 共鳴領域の頂点の中黒四角はバーコフサドル点である.

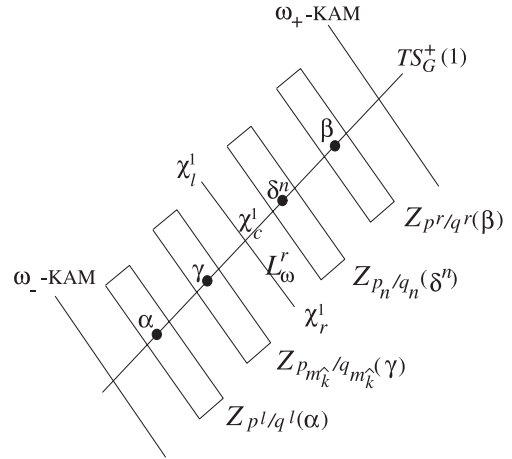


図50: 4つの共鳴領域, それに $TS_G^+(1)$ のまわりの L_ω^r を示す. α , β , γ , および δ^n と名づけた点は $TS_G^+(1)$ 上のバーコフ楕円点であり, $\omega_\pm$ -KAM は $Z(\omega_-, \omega_+)$ の境界をなす.

A.9 対称軸上の区間

対称軸上に一連の区間を定義する. この区間は定理1の証明に使う.

I_k^u と I_k^d の定義. $k \geq 1$ とする.

$$\begin{aligned} I_k^d &= (T^{-k} V_{0,0}^u) \cap S_G^+(0), \\ I_k^u &= (\sigma^{-k+1} T^{k-1} U_{0,1}^d) \cap S_G^+(0) = R_{(0,\pi)} I_k^d. \end{aligned} \quad (59)$$

J_k^u と J_k^d の定義. $k \geq 0$ とする.

$$\begin{aligned} J_k^d &= (T^{-k} V_{0,0}^u) \cap S_H^+(0), \\ J_k^u &= (\sigma^k T^{-k} V_{0,1}^d) \cap S_H^+(1) = R_{(\pi,\pi)} J_k^d. \end{aligned} \quad (60)$$

I_k^d の存在は文献 [7] で議論した. 上で定義した

区間の典型例を図51に示した。

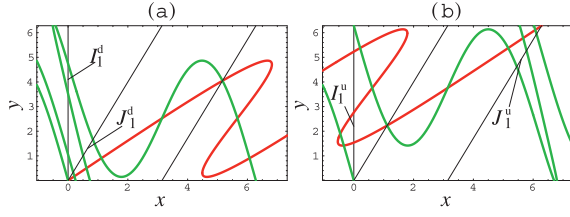


図51：対称軸内の区間の定義．(a) I_1^d と J_1^d ，(b) I_1^u と J_1^u ($a=3.5$)

区間の間の強制関係を導入しよう．区間 I の存在から区間 J の存在が言えるとき， $I \rightarrow J$ と書く．以下の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} J_k^{d,u} &\rightarrow I_{k+1}^{d,u} (k \geq 0), \\ I_k^{d,u} &\rightarrow J_k^{d,u} (k \geq 1), \\ I_k^{d,u} &\rightarrow I_{k'}^{d,u} (k' > k \geq 1), \\ J_k^{d,u} &\rightarrow J_{k'}^{d,u} (k' > k \geq 0). \end{aligned} \quad (61)$$

式 (61) の最初の式を導出しよう．関係式 $T^{-1}J_k^d = GJ_k^d$ より， J_k^d の逆像は領域 $x < 0$ にある．このことから， $T^{-k-1}V_{0,0}^u$ が $S_G^+(0)$ と交わることが言える．こうして， I_{k+1}^d の存在が言えた．第二式は区間の作り方から明らかである．第三式と第四式はラムダ補題を使って得られる [40]．

最後に，共鳴領域内の対称軸の弧に名前を付けよう． $k \in \mathbb{Z}$ として， q が偶数の場合は，

$$l_{p/q}(k) = S_G^+(k) \cap \langle Z_{p/q} \rangle \quad (62)$$

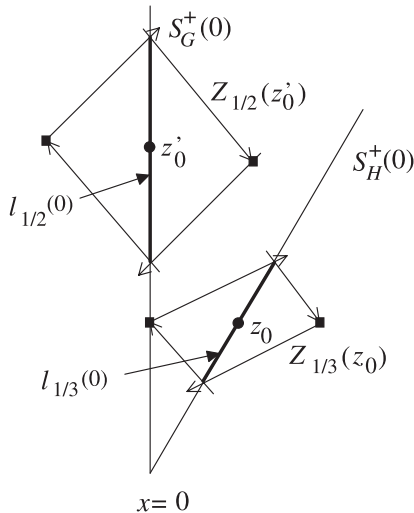


図52：共鳴領域に含まれる対称軸の弧． $Z_{1/2}(z_0')$ 内の弧 $l_{1/2}(0)$ と $Z_{1/3}(z_0)$ 内の弧 $l_{1/3}(0)$ を描いた．

と定義し， q が奇数の場合は，

$$l_{p/q}(k) = S_H^+(k) \cap \langle Z_{p/q} \rangle \quad (63)$$

と定義する．例として， $l_{1/2}(0)$ と $l_{1/3}(0)$ を図52に示しておいた．以下では，混乱のおそれがないとき， $l_{p/q}(n)$ をしばしば $l_{p/q}$ と省略する．

B 性質A.3.1の証明

証明に入るまえに，標準写像の重要な性質を述べておく．その性質は，本報告の主要部分では使わなかった．標準写像は補遺A.1節の (30) あるいは (33) 式で表現されるように，対合の積で書くことができる．標準写像はさらに対称性が強く，別の対合の積として次のように書ける．

$$T = h \circ g \quad (64)$$

ただし，対合 h と g は次のように表現される ([48], [49])．

$$h(x, y) = (x - y, -y). \quad (65)$$

$$g(x, y) = (x, 2\pi - y - af(x)). \quad (66)$$

H ， G のときと同様， h の不動点集合 $y=0$ を h の対称軸と呼ぶ． g の不動点集合は $y = \pi - af(x)/2$ である．これを対称軸 $S_g(1)$ と呼ぶ．

(i) の証明． $Z_{0/1}(Q_{0,0})$ の構築法より， $HZ_{0/1}(Q_{0,0}) = Z_{0/1}(Q_{0,0})$ が成り立つ．次に，直接計算により， $R_{Q_{0,0}} = H \circ h = h \circ H$ を得る．一方，関係 $h[P_{0,0}, v]_{W_u^1} = [v', P_{0,0}]_{W_s^1}$ および $h[v, P_{1,0}]_{W_s^2} = [P_{1,0}, v']_{W_u^2}$ は $v' = h(Hv) = hv$ から得られる．だから， $hZ_{0/1}(Q_{0,0}) = Z_{0/1}(Q_{0,0})$ を得る．これから関係 $hHZ_{0/1}(Q_{0,0}) = Z_{0/1}(Q_{0,0})$ が出る (Q.E.D.)

(ii) の証明． G と $S_g(1)$ の交点 $z_0 = (0, \pi)$ と $z_1 = (\pi, \pi)$ は $1/2$ バーコフ楕円周期軌道の軌道点である．

z_0' は $S_H(-1)$ と $S_g(1)$ の交点であるとし， z_1' は $S_H(0)$ と $S_g(1)$ の交点であるとする． $S_g^-(1)$ は $x < 0$ なる $S_g(1)$ の分枝とし， $S_g^+(1)$ は $x > 0$ なる $S_g(1)$ の分枝とする．2つの関係 $R_{z_0} S_g^-(1) = S_g^+(1)$ および $R_{z_0} S_H(-1) = S_H(0)$ が成り立つ．この関係から $R_{z_0} z_0' = Ggz_0' = z_1'$ を得る．すると， $gz_0' = z_0'$ および $Hgz_0' = z_1'$ より，関係式 $z_1' = Hz_1' = HGGz_0' = HGz_0' = Tz_0'$ を得る．ただし， H

の対称軸を $S_H(0)$ とした. $Gz'_0 = z'_1$ より, $z'_2 = Tz'_1 = TGz'_0 = Hz'_0$ を得る. すると, $HS_H(-1) = S_H(1)$ より, $z'_0 = z'_2 \pmod{2\pi}$ が得られる. よって, z'_0 と z'_1 は回転数 $1/2$ の軌道の軌道点である. 軌道がバーコフ型であることはほぼ自明である. 回転数 $1/2$ のバーコフ型軌道が 2 つ存在することを示すのも容易である. ポアンカレ (Poincaré) 指数の保存則より, $O(z'_0)$ はサドルである. なぜなら $O(z_0)$ が楕円型だからである.

z'_0 の不安定多様体の右上に出る分枝は $S_G(0)$ と s で交わる. z'_1 の安定多様体の左上から来る分枝は $S_G(0)$ と t で交わる. 点 $t = gs$ は $S_G(0)$ 上にある. なぜなら $t = gGs = \sigma_{z_0}s$ だからである. z'_0 の安定多様体の右下から来る分枝は $S_G(0)$ と t で交わり, z'_1 の不安定多様体の左下に出る分枝は $S_G(0)$ と t で交わる. 点 s と t はサドル z'_0 と z'_1 のホモクリニック点である. $[z'_0, s]_u$ は z'_0 の不安定多様体の弧であるとし, $[s, z'_1]_s$ は z'_1 の安定多様体の弧であるとし, $[z'_0, t]_s$ は z'_0 の安定多様体の弧であるとし, $[t, z'_1]_u$ は z'_1 の不安定多様体の弧であるとする. このとき $G[z'_0, s]_u = [s, z'_1]_s$, $G[z'_1, t]_u = [t, z'_0]_s$, $g[z'_0, s]_u = [t, z'_0]_s$, $g[z'_1, t]_u = [s, z'_1]_s$ より, 関係 $GgZ_{1/2}(z_0) = Z_{1/2}(z_0)$ が得られる (Q.E.D.)