

TAMA300 の低周波防振装置 (SAS) に組み込まれた 倒立振り子 (IP) の力学特性

石崎秀晴, 我妻一博^{Aa}, 辰巳大輔, 新井宏二^{Bb}, 和泉 究^{Ab}, 高橋竜太郎

(2009年10月30日受付; 2009年12月28日受理)

Dynamic Characteristics of an Inverted Pendulum Incorporated to the Seismic Attenuation System of TAMA300.

Hideharu ISHIZAKI, Kazuhiro AGATSUMA, Daisuke TATSUMI,
Koji ARAI, Kiwamu IZUMI, and Ryutaro TAKAHASHI

Abstract

The gravitational wave detector TAMA300 installed Seismic Attenuation System in 2007. The natural frequency of the SAS has 50 mHz. The low natural frequency of the SAS is contribution of Inverted Pendulum. IP is a structure like the column about 2.5 m in height. It has the characteristics, that the natural frequency falls when the load increases on the upper end of the column. In addition, the natural frequency changes too when lateral force acts on top of the column. We can understand these characteristics as the buckling phenomena of the long column. The modified Galerkin method was used for calculation of the frequency. As the results, the relations of the load and the natural frequency became clear.

1. はじめに

国立天文台, 三鷹キャンパスに建設された基線長 300 m のレーザー干渉計型重力波検出器 (TAMA300) は 1998 年から観測実験を開始し, 2005 年から 2007 年初めにかけて新しい防振装置である低周波防振装置 (Seismic Attenuation System) が導入され検出感度の向上を果たした¹⁾.

重力波干渉計への雑音源として最も大きく直接的に作用するのが地面を伝達してくる振動である。これを絶縁するためのシステムが防振装置であり, その固有振動数はできるだけ低いことが望まれる。それより高い周波数領域では振幅を減衰 (≡ 絶縁) するからである。

SAS は最低次の固有振動数が 50 mHz 程度であり, それ以上の周波数帯域に対して効果を発揮する。干渉計全体の制御を含めた総合的な性能として 0.2 Hz 以上における光路長変動スペクトルが, 従来の観測に較べて, 一桁以上の改善を果たした。

固有振動数 50 mHz を達成している主体が SAS に組み込まれている倒立振り子 (Inverted Pendulum)

である。IP は高さ 2.5 m 程で3本足のやぐら状 (トラス構造) の構造物であり, 各足の足下と頭頂部が弾性ヒンジ (ピンジョイントに相当) で基礎部 (地面) や部材同士が結合されている (図1)。



図1 倒立振り子 (Inverted Pendulum) の外観

A) 東京大学大学院理学系研究科, B) カリフォルニア工科大学, a) 東京大学宇宙線研究所, b) LIGO project, Caltech.

この構造により、地面側のヒンジを支点として頭頂部側が低周波数で振動することで、水平方向の地面振動に対しては逆に頭頂部の動揺を抑制する。

振動の復元力は足下のヒンジ（以下、flex joint）の弾性による。そして、IPの固有振動数は頭頂部（以下、top table）に負荷された荷重の重量に依存（固有振動数 $\propto \sqrt{\text{定数} - \text{重量}}$ ）することが知られている²⁻⁶。さらに、一定荷重の下で、top tableに対して静的に数mm程度の水平変位（以下、offset）を与えると、それに応じて固有振動数が数mHz程度づつ上昇するという事実も見つかった⁶。

これらIPの力学特性はflex jointに対する軸方向の圧縮荷重による座屈現象（buckling）に伴う弾性的な特性として理解される。

現在、神岡鉱山（岐阜県）に3キロメートル級大型低温干渉計（Large Scale Cryogenic Gravitational Wave Telescope）の建設計画が進められている⁷。LCGTにおいてもSASやIPは重要な構成要素として検討されている。そこでこの際、IPにおける座屈現象の基本的な知見をまとめておくことも、今後の参考となると思われる。

2. 座屈現象

横に渡された梁（beam）に、静荷重が作用してたわみ（deflection）が生じたときの釣合いは

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

と表される。ここに、 $1/\rho \text{ m}^{-1}$ は梁の曲率で、 $EI \text{ N m}^2$ は曲げ剛性（flexural rigidity）、 $M \text{ N m}$ は曲げモーメント（bending moment）である。

梁の長手方向を x 座標とし、たわみにより曲がって行く方向を y 座標とする（慣習により右手系ではない）。すると曲率は

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

である。

たわみ角 $\theta = dy/dx \ll 1$ である場合、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

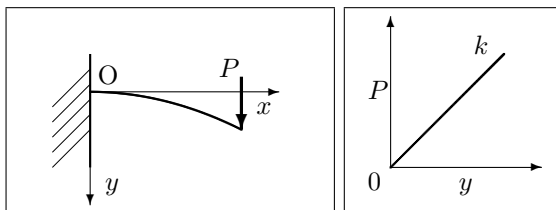


図2 横荷重を受ける梁のモデルと復元力特性

が得られる。式(1)をたわみ方程式という。

曲げモーメント M は座標 x または y の関数として表される。二、三の簡単な例を掲げる。

図2のような一端が壁面に埋込まれた梁＝片持ち梁（cantilever）の先端に荷重 $P \text{ N}$ が鉛直下向きに作用し、梁の長さが $l \text{ m}$ のときは

$$M = -P(l - x)$$

と表される。これを式(1)に代入して積分し、境界条件として $x = 0$ で $y = dy/dx = 0$ を与えて解くと

$$y = \frac{P}{6EI} (3lx^2 - x^3)$$

となる。そこで、先端 $x = l$ における変位

$$y = \frac{l^3}{3EI} P \quad (2)$$

を得る。 EI と l は定数であるから、式(2)は横荷重を受ける片持ち梁の荷重と変形の関係＝復元力特性を示している（図2右）。この場合は線形の関係があるからフックの法則（Hooke's law）が成立っており、バネ定数 $k = 3EI/l^3 \text{ N m}^{-1}$ である。

つぎに、全く同じ形状の梁に対して、図3のように先端に横から軸方向の荷重 $P \text{ N}$ が作用して、たわみ $\delta \text{ m}$ が生じた状態を考える。このとき

$$M = -P(\delta - y).$$

これを式(1)に代入して積分し、境界条件も同じく $x = 0$ で $y = dy/dx = 0$ を与えて解くと

$$y = \delta \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x\right)$$

となる。先端 $x = l$ でたわみ $y = \delta$ を与えて解いているので、荷重と変位の関係が直ちには得られない。そこで、これを上式に代入すると

$$\delta = \delta \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} l\right)$$

であるから、 $\delta = 0$ 、または、 $\cos \sqrt{P/(EI)} l = 0$ でなければならない。

前者はたわみがないことを示している。実際、軸力が作用しても必ずたわむとは限らない。後者からは

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} l = n \frac{\pi}{2}, \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

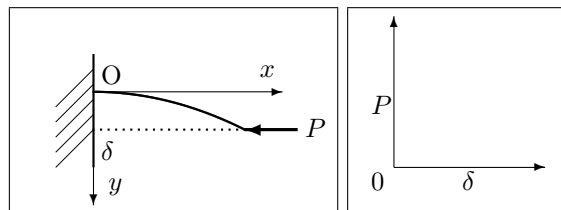


図3 軸力を受ける梁のモデル

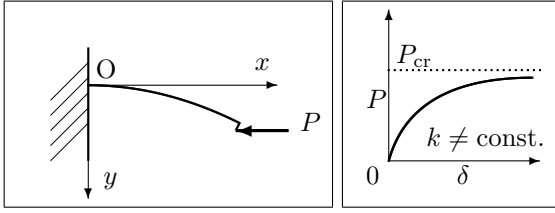


図4 偏心した軸力を受ける梁のモデルと復元力

が得られる. $n = 1$ に対して

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \quad (3)$$

という関係が求められる. すなわち, 荷重 $P \geq P_{cr}$ のとき梁は図3のように余弦曲線で表されるたわみが生じて安定に釣合うことが分かる. 逆に, 荷重 $P < P_{cr}$ であれば, たわむことなく梁は真直のまま安定している. P_{cr} を限界荷重 (critical load), または, 座屈荷重 (buckling load) という.

このように, 梁の安定な釣合い状態が P_{cr} を境に変化する現象を座屈と呼び, 不安定現象の一種である (定着しているわけではないが, 弾性不安定 (elastic instability) ともいわれる).

図3の例からは, 荷重と変位の関係が得られなかった. そこで, 図4のように荷重 P は軸中心から e m だけ偏心して作用しているとするとモーメント Pe の作用で必ずたわみが生じる.

$$M = -P(\delta + e - y)$$

で, これに境界条件として $x = 0$ で $y = dy/dx = 0$ と $x = l$ で $y = \delta$ を与えて解くと

$$\delta = e \left(\sec \sqrt{\frac{P}{EI}} l - 1 \right),$$

$$y = e \sec \sqrt{\frac{P}{EI}} l \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right).$$

上の式から先端における荷重 P と変位 δ の関係が

$$P = \frac{EI}{l^2} \left\{ \sec^{-1} \left(1 + \frac{\delta}{e} \right) \right\}^2 \quad (4)$$

と得られる. 式(4)は $|\delta/e| < 1$ として展開すると, $|\delta/e| \lesssim 1$ のとき

$$P = \frac{EI}{l^2} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{1}{1 + \delta/e} \right) \right\}^2$$

$$= \frac{EI}{l^2} \left[\frac{\pi}{2} - \left\{ \frac{1}{1 + \delta/e} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 + \delta/e} \right)^3 + \dots \right\} \right]^2$$

$$\approx \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{\delta}{e} + \dots \right) \right\}$$

となる. 式(4)の δ と P の関係を図4右⁸⁾に示す. 復元力特性にはバネ定数に相当するものがな

く荷重は限界荷重 (式(3)と同じ) に向かって漸近する. 偏心 e が小さい方が急に漸近する. この結果は, フックの法則が成立しないように見える.

しかし, たわみ角 θ を見ると式(4)の前の式から

$$\frac{dy}{dx} = e \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \sec \sqrt{\frac{P}{EI}} l \cdot \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x,$$

$$\therefore \theta(l) = e \sqrt{\frac{P}{EI}} \tan \sqrt{\frac{P}{EI}} l = e \sqrt{\frac{P}{EI}} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l + \dots \right)$$

$$\approx \frac{l}{EI} (1 + \dots) Pe.$$

ただし, $|\sqrt{P/(EI)} \cdot l| < \pi/2$ であり, 式(1)が成立するために必要な $\theta \ll 1$ のときは満たされている. ゆえに, $\theta(l) \propto Pe$ であってフックの法則を逸脱してはいない.

3. SASの構造とIPのモデル化

図1をトレースした線画を図5に示す. IPの3本の足 (以下, legs: 直径129 mm, 板厚2 mm, 長さ約1200 mmの中空円筒で, 120° 間隔に均等配置) は, 基礎部 (下部の円輪状の部品, 地面と直結している) と flex joint により接合されており, 地面とは柔に結合している. Legs と top table の接合も flex joints であり, これも柔結合である.

Top table の中心からワイヤーにより多段の振り子系が懸架されており, その最終段がレーザー反射鏡である. また, top table 上には3機づつの加速度センサーと変位センサーが置かれ top table の運動を測定し制御する.

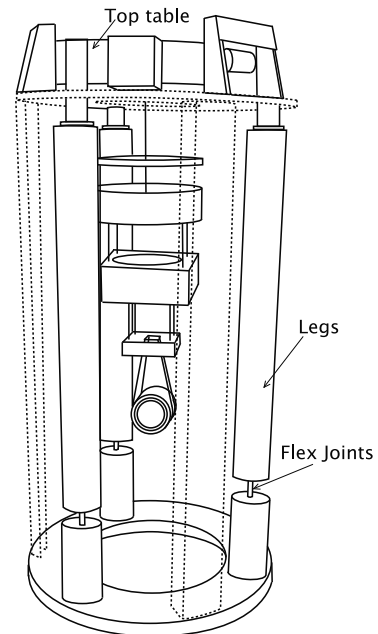


図5 倒立振り子 (IP) の構造 (図1のトレース)

一方、図5において点線で描かれている柱状の部品は溝型鋼 (U-channel) で、その足下の基礎部と頭頂部にあるテーブルとはボルト接合され、地面と剛に結合している。こちらのテーブル上にはIPのtop tableにoffsetを加えるためのコイルマグネットアクチュエーター等が設置されている。

アクチュエーターも3台あって120° 間隔に置かれて任意の水平方向力を生じることができる。その力はtop tableを介してlegsの頂点部へ伝達される。

以降の議論を簡単化するために、IP各部の部品は寸法と配置に誤差がなく、種類が同一の部品は材料特性が均一であると仮定する。さらに、legsはステンレス鋼製であり肉厚で太く十分に剛性が高い。Flex jointsの材料はマルエージング鋼 (強靱性を追求して開発された鋼材) で高剛性であるが、形状 (直径8.2 mm, 長さ47 mmの中実丸棒) はlegsに較べて極端に小さく細長い部品である。

したがってIPの弾性変形を考える場合は、もっぱら、flex jointsの変形 (たわみ) だけを考え、legsとtop tableは剛体であるとみなす。

1節で、ふれたようにIPはトラス (truss) 構造であり、正三角形の頂点に配置されたlegsはその部材 (member) である。Legsの上部にあってtop tableと接合するflex jointは回転に対して自由な (モーメントを支持しない) 支点 (回転支点, 滑節, pin joint) を実現している。

一方、legs下端のflex jointも形状は回転支点であるが、モーメントを全く支持しないと仮定するとIPが立っていられないことになる。したがって、こちらは低剛性ながらlegsを地面 (基礎部) に垂直に固定する機能を果たしている (固定支点, 剛節, rigid joint)。

また、top tableも3本の棒状の水平部材が回転支点で接合されているものとしてモデル化できる (図6)。

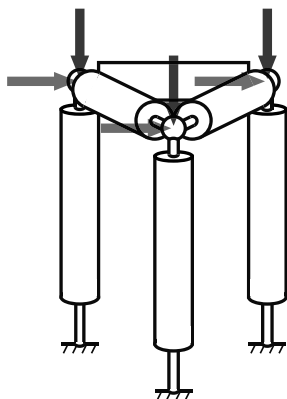


図6 IPのトラス (truss) 構造モデル

Top table上の荷重とアクチュエーターにより生成された水平力は3個のlegs上部の回転支点に均等に作用すると仮定すると、3本のlegsは (下端のflex jointsの部分でたわみ) 均等に傾斜するはずである。よって、legsは変形した後も平行の状態を保ち、3本の水平部材には荷重 (外力) や応力 (内力) が生じない。すなわち水平部材は、なくてもよいことになる。

以上から、IPの3本の足 (柱) はそれぞれ独立した一本ずつの長柱として扱うことが許される。その際、top table上の荷重は三等分して各々の柱の垂直荷重となり、アクチュエーターによる水平力は均等に作用すると考える。

なお、top table上のアクチュエーターは水平力のみならず、鉛直軸回りの回転 (yaw) 運動も発生させることができる。これはIPの各足に対してはねじりモーメント (torsional moment) を作用させることになるが、これは別途に検討することとして、本報告ではねじりモーメントはないものとする。

4. ハミルトンの原理

一本足のIP弾性モデルを図7に示す。前節の議論に従い、Legとtop tableは剛体で変形しない。両者の合成重心Gに荷重 Mg kg, 慣性モーメント J' kg m²が作用する。弾性変形はflex jointに限られ、その上端における接線とlegの中心線が一致し、両者はなめらかに接続している。

Flex joint下端を座標原点Oとし、上端が $x=l$ m, 重心Gは $x=L$ mである。Flex jointの x 軸方向の伸び (縮み) を $u(x,t)$ m, 横 (y 方向) たわみを $v(x,t)$ mとする。 t sは時間である。

Leg (= flex joint上端) の勾配は $\theta(l,t)$ である。Flex jointの密度を ρ kg m⁻³とし (以降、記号 ρ は密度だけを表す), 断面積を A m², ヤング率 (Young's modules) が E Pa, 断面二次モーメントが I m⁴である (EI は曲げ剛性)。

Flex jointの弾性による静的な変形と動的な振動を考える。そこで以下の基本的な仮定を設ける⁹⁾。

- (1) 断面の寸法は長さに較べて十分に小さい (細長梁: slender beam)。
- (2) 変形前に軸心に垂直な横断面は変形後も平面を保つ (ベルヌーイ・オイラーの仮説: hypothesis of the Bernoulli-Euler)。
- (3) 曲げに伴う軸方向のひずみが支配的で、ひずみは十分に小さく、応力とひずみはフックの法則に従う。

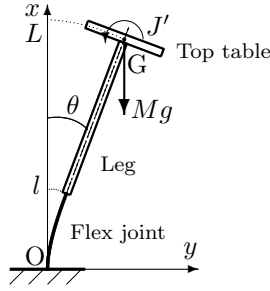


図7 IP model.

弾性体の flex joint と剛体の leg と top table

- (4) 梁 (柱) の断面は軸に対して対称性を持つ (断面がゆがまず, 面内変形のみ生じると仮定).
- (5) 軸方向の慣性力や回転振動に伴う回転慣性が無視できる.
- (6) たわみが微小の仮定を少し緩め, 軸方向の伸縮を考慮し, 傾きの二乗の項はひずみと同程度とする.
- (7) 曲げに伴う横断面の傾きの影響は小さく, 曲率の高次項は省略する.
- (8) 軸方向ひずみの二乗, たわみの高次微分の二乗, ならびに軸ひずみとたわみの高次微分との相乗効果は省略できる.

系の運動エネルギー \tilde{T} J は flex joint 自身の運動エネルギーに加えて, leg と top table の運動の慣性をもたらすエネルギーが flex joint 上端の境界条件として作用するとして

$$\tilde{T} = \int_0^l \int_A \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dAdx + \left[\frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]_{x=l} \quad (5)$$

である. ただし,

$$J = J' + ML^2$$

は, O 点まわりの leg + top table の慣性モーメントである.

ポテンシャルエネルギー \tilde{U} J は flex joint の弾性により内部に蓄えられる単位体積当りの曲げひ

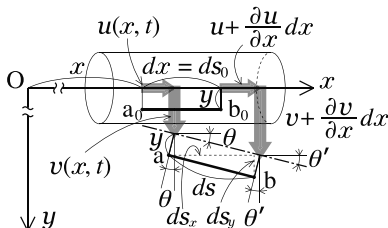


図8 flex joint 内部の弾性による変形

ずみエネルギー $(1/2)\sigma_x \varepsilon_x$ から

$$\tilde{U} = \iiint \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV = \int_0^l \int_A \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 dAdx$$

と表される. ここに, σ_x Pa は曲げ応力 (bending stress), ε_x は垂直ひずみ (normal strain) であり, x 軸方向の応力とひずみに対するフックの法則

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

が適用されている.

ひずみ ε_x は図8に示す変形のようなすを考慮し

$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

となる⁹⁾.

よって, ポテンシャルエネルギーは

$$\tilde{U} = \int_0^l \int_A \frac{1}{2} E \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}^2 dAdx. \quad (6)$$

さらに外力がポテンシャル \tilde{V} J から導かれるものとして,

$$\tilde{V} = - \int_0^l \int_A \rho a v dAdx. \quad (7)$$

ただし, $a \text{ m s}^{-2}$ は単位質量当りの外力である.

ハミルトンの原理 (Hamilton's principle) を式で表すと

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{T} - \tilde{U} - \tilde{V}) dt = 0 \quad (8)$$

である. ここに, δ は変分 (variational) を表す記号である. 式(5)~(7)を式(8)に適用すると

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l \rho A \frac{\partial v}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx + \left[J \frac{d\theta}{dt} \delta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right]_{x=l} - \int_0^l \int_A E \varepsilon_x \left\{ \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - y \delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right\} dAdx - \int_0^l (-\rho A a \delta v) dx \right] dt = 0.$$

上式は簡単な計算により

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[N_x \delta u \right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u dx + \int_0^l H(v, t) \delta v dx + \left[\left(J \frac{d^2 \theta}{dt^2} - M_x \right) \delta \theta \right]_{x=l} - \left[-M_x \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{x=0} + \left[\left(N_x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) \delta v \right]_{x=0}^{x=l} \right\} dt = 0. \quad (9)$$

ただし,

$$H(v, t) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \rho a A,$$

$$N_x = EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad M_x = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\int_A y dA = 0, \quad I = \int_A y^2 dA, \quad \theta = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

さらに $t = t_0$ と $t = t_1$ で $\delta v = \delta \theta = 0$ としている.

式 (9) において, x 座標に関する積分の内部を $= 0$ と置いた成分から軸方向とたわみに関する運動方程式が定まり, 大カッコでくくられた成分 $= 0$ とした式から境界条件が求められる.

まず, 式 (9) の第 1, 2 項から x 軸方向の伸び (縮み) に関する方程式と境界条件を考察しておく. 第 2 項から, x 軸方向の運動方程式が

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0$$

であり, 境界条件は第 1 項の $\delta u = 0$ を採用して

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u_l$$

とする. 運動方程式を一回積分すると

$$N_x = C_1(t)$$

となって x 座標に対して定数となる. よって,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{C_1}{EA}.$$

もう一度積分して

$$u = - \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{C_1}{EA} x + C_2.$$

C_2 も x に関して定数である.

境界条件を作用させると

$$u_l = - \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{N_x l}{EA}$$

であるから,

$$N_x = N_{x0} + \frac{EA}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (10)$$

ここに,

$$N_{x0} = EA \frac{u_l}{l}$$

は初期の軸荷重である. 以降, 式 (9) における軸荷重 N_x は式 (10) の表現で用いる.

つぎに, 式 (9),(10) を無次元化するために, 以下のパラメータを導入する.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{v}{r}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_0},$$

$$J^* = \frac{J}{\rho A l^3}, \quad \alpha = \frac{a}{EI r / (\rho A l^4)}, \quad m_x = \frac{M_x}{EI r / l^2},$$

$$n_x = \frac{N_x}{EI / l^2}, \quad n_{x0} = \frac{N_{x0}}{EI / l^2}, \quad u^* = \frac{u_l}{l}, \quad \gamma = \frac{r}{l}.$$

ここに,

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \text{ m}, \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \text{ s}^{-1}, \quad \Omega \text{ s}^{-1}$$

であり, r は断面二次半径 (radius of gyration of area), ω_0 は有次元の固有角振動数の表現に含まれる係数で, Ω は有次元の角振動数である. また, $1/\gamma$ は細長比 (slenderness ratio) と呼ばれる.

式 (9),(10) に上記パラメータを適用し

$$- \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ H(\eta, \tau) \delta \eta d\xi \right. \\ \left. + \left[\left(J^* \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} - m_x \right) \delta \theta \right]_{\xi=1} - \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right]_{\xi=0} \right. \\ \left. + \left[\left(n_x \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \right) \delta \eta \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \right\} d\tau = 0, \quad (11)$$

$$n_x = n_{x0} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi, \quad (12)$$

$$n_{x0} = \gamma^{-2} u^*, \quad m_x = - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}, \quad \theta = \frac{\partial \eta}{\partial \xi},$$

$$H(\eta, \tau) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - n_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \alpha.$$

式 (11) における

$$H(\eta, \tau) = 0$$

が, たわみに対する運動方程式である.

境界条件は一般に $\xi = 0$ と $\xi = 1$ において

$$\delta \eta = 0, \quad \text{または} \quad n_x \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0$$

のいずれか, と $\xi = 0$ における

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = 0, \quad \text{または} \quad \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) = 0$$

のどちらか, と $\xi = 1$ で

$$J^* \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi \partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = 0, \quad \text{または} \quad \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) = 0$$

のいずれかの 4 条件を満たす必要がある.

Flex joint に対する境界条件は足下が垂直に固定されていることから $\xi = 0$ で

$$\eta = 0 \quad \text{と} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \quad (13)$$

とし, $\xi = 1$ では

$$n_x \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0 \quad \text{と} \quad J^* \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi \partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = 0 \quad (14)$$

が選ばれる.

5. ガラーキン法

固有振動数に対する近似解法としてエネルギー法があり、そのひとつがガラーキン法 (Galerkin method) である。これは方程式に境界条件を満足する近似解を代入し、その残差 (誤差) を最小にするために、 $\int_0^l (\text{近似解}) \cdot (\text{残差}) dx = 0$, すなわち両者の内積をゼロと置いて解く方法である¹⁰⁾。これは運動方程式と座標関数 (境界条件を満足した固有振動モード) が直交しているという条件を利用した方法である¹¹⁾。

Flex joint に対しては、式 (5) や式 (14) において leg と top table の慣性モーメント J^* の含まれる項を付加したことにより、通常の座標関数が選べないので修正ガラーキン法 (modified Galerkin method) で計算する¹¹⁻¹³⁾。

初期に軸 (圧縮) 荷重 $P = Mg \equiv N_{x0}$ が flex joint に作用しているとして解析する。圧縮力の場合には負号を用いて $n_{x0} = -p$ と書く ($p = P/(EI/l^2)$)。

固有振動モードを近似する座標関数の無限級数を考え、求める第 j 次の座標関数 $\zeta_j(\xi)$ を仮定し、未知の時間関数 $\sigma_j(\tau)$ との積でたわみ η を表す。

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_j \zeta_j(\xi) \sigma_j(\tau), \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

η の変分は σ_j が未知関数であることを考慮し

$$\delta\eta = \sum_i \zeta_i \delta\sigma_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

とする。

式 (15), (16) を式 (11), (12) に代入して

$$\begin{aligned} & - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_i \delta\sigma_i \left[\sum_j \int_0^1 \left\{ \zeta_j \ddot{\sigma}_j \right. \right. \\ & \quad - \left(-p + \sum_k \sum_l \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma_k \sigma_l \zeta'_k \zeta'_l d\xi \right) \zeta_j'' \sigma_j \\ & \quad + \zeta_j^{(4)} \sigma_j - \alpha \left. \right\} \zeta_i d\xi + \left[\sum_j \sigma_j \left\{ -\zeta_j''' \right. \right. \\ & \quad + \left. \left. \left(-p + \sum_k \sum_l \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma_k \sigma_l \zeta'_k \zeta'_l d\xi \right) \zeta_j' \right\} \zeta_i \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \\ & \quad + \left[\sum_j \left(J^* \zeta_j' \ddot{\sigma}_j + \zeta_j'' \sigma_j \right) \zeta_i' \right]_{\xi=1} \\ & \quad \left. - \left[\sum_j \zeta_i' \zeta_j'' \sigma_j \right]_{\xi=0} \right] d\tau = 0. \\ & \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_j &= \frac{d^2 \sigma_j}{d\tau^2}, \quad \zeta'_n = \frac{d\zeta_n}{d\xi}, \quad n = i, j, k, l \\ \zeta_j'' &= \frac{d^2 \zeta_j}{d\xi^2}, \quad \zeta_j''' = \frac{d^3 \zeta_j}{d\xi^3}, \quad \zeta_j^{(4)} = \frac{d^4 \zeta_j}{d\xi^4} \end{aligned}$$

である。

上式において $\delta\sigma_i$ は時間領域内で任意の値をとる。よって、上式が恒等的に満足されるためには個々の σ_i に対して τ に関する積分 (いちばん外側の大カッコ) の内部が成立 ($[\dots] = 0$) する必要がある。それに対して修正ガラーキン法の計算を適用すると、最終的に

$$\begin{aligned} & \sum_j M_{ij} \ddot{\sigma}_j + \sum_j \left(K_{ij} - p N_{ij} \right) \sigma_j \\ & + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} \sigma_j \sigma_k \sigma_l - \alpha Q_i = 0. \quad (17) \\ & \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_0^1 \zeta_i \zeta_j d\xi + J^* \zeta_i'(1) \zeta_j'(1), \\ K_{ij} &= \int_0^1 \zeta_i'' \zeta_j'' d\xi, \\ N_{ij} &= \int_0^1 \zeta_i' \zeta_j' d\xi, \\ E_{ijkl} &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \zeta_i' \zeta_j' d\xi \right) \left(\int_0^1 \zeta_k' \zeta_l' d\xi \right), \\ Q_i &= \int_0^1 \zeta_i d\xi. \end{aligned}$$

方程式 (17) を解くために座標関数として、一様断面の片持ち梁の j 次の固有振動モードである

$$\zeta_j = c_j \left(1 - \cos \frac{2j+1}{2} \pi \xi \right), \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

を採用する^{10, 14)}。ただし、 c_j は j 次の未定係数である。式 (18) は式 (13) の幾何学的境界条件だけを満たしている。式 (18) の j の数列に対応して、式 (17) も $i, j, k, l = 0, 1, 2, \dots$ とする。

以下では式 (17) における $i, j, k, l = 0$ として式 (18) も $j = 0$ により一項のみで近似解を求める。

$c_0 = 1$ として式 (17) の係数を計算すると

$$\begin{aligned} m &\equiv M_{00} = \int_0^1 \zeta_0^2 d\xi + J^* \zeta_0'^2(1) \\ &= \frac{3\pi - 8}{2\pi} + \frac{\pi^2}{4} J^*, \\ k &\equiv K_{00} = \int_0^1 \zeta_0''^2 d\xi = \frac{\pi^4}{32}, \\ n &\equiv N_{00} = \int_0^1 \zeta_0'^2 d\xi = \frac{\pi^2}{8}, \end{aligned}$$

$$e \equiv E_{0000} = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \zeta_0'^2 d\xi \right)^2 = \frac{\pi^4}{128},$$

$$q \equiv Q_0 = \int_0^1 \zeta_0 d\xi = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

最初に、静的な変形を考える。式(17)における時間微分項をゼロとおき、 $\bar{\sigma} = \sigma_0$ と記述すると

$$(k - pn)\bar{\sigma} + e\bar{\sigma}^3 = \alpha q. \quad (19)$$

α は横方向から作用する静的な外力を表しており、これがゼロのとき静的な軸荷重 p による変形は

$$\bar{\sigma} = 0, \bar{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{pn - k}{e}} = \pm \sqrt{\frac{n}{e}} \sqrt{p - \frac{k}{n}}. \quad (20)$$

式(20)は $\bar{\sigma}$ が3根を持つことを示している。これから、 $p \leq (k/n)$ では $\bar{\sigma} = 0$ が唯一の解である。

$p > (k/n)$ において、たわみ $\eta = \bar{\sigma}\zeta_0(\xi)$ が生じる。軸荷重 $p_{cr} = k/n = \pi^2/4$ が限界荷重となる。

つぎに、静的な変形(=平衡状態)に重畳される摂動としての動的(たわみ振動)変位 $\tilde{\sigma}(\tau)$ を考える。式(17)における σ_0 との関係は

$$\sigma_0 = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma}. \quad (21)$$

ただし、 $\ddot{\sigma} = 0$ である。

式(21)を式(17)へ代入し

$$m\ddot{\tilde{\sigma}} + (k - pn)(\bar{\sigma} + \tilde{\sigma}) + e(\bar{\sigma} + \tilde{\sigma})^3 - \alpha q = 0,$$

$$\begin{aligned} \therefore (k - pn)\bar{\sigma} + e\bar{\sigma}^3 - \alpha q \\ + m\ddot{\tilde{\sigma}} + (k - pn)\tilde{\sigma} \\ + e(\bar{\sigma}^3 + 3\bar{\sigma}^2\tilde{\sigma} + 3\bar{\sigma}\tilde{\sigma}^2) = 0. \end{aligned}$$

式(19)を適用し、 $\tilde{\sigma}$ の高次項を省略すると

$$m\ddot{\tilde{\sigma}} + (k - pn + 3e\bar{\sigma}^2)\tilde{\sigma} = 0 \quad (22)$$

となる。

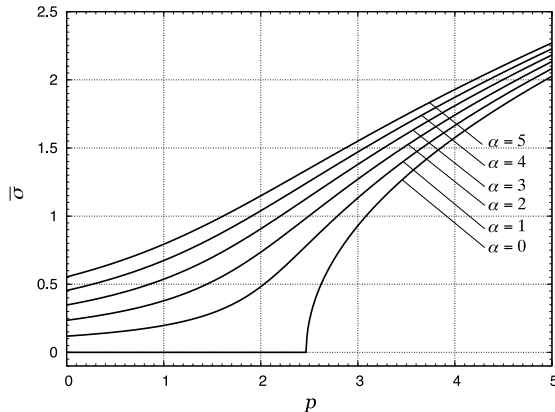


図9 軸荷重 p と横荷重 α に対する静的たわみ $\bar{\sigma}$

時間関数 $\tilde{\sigma}(\tau)$ を

$$\tilde{\sigma} = C_3 \cos \omega_1 \tau$$

とおくと、 $C_3 \neq 0$ であるために一次の固有振動数 ω_1 が

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{n}{k}p + 3\frac{e}{k}\bar{\sigma}^2} \quad (23)$$

と得られる。

式(20)から、限界荷重以下では $\bar{\sigma} = 0$ なので、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{n}{k}p} \quad (24)$$

となり、限界荷重を越えると

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{2\left(\frac{n}{k}p - 1\right)} \quad (25)$$

である。

さらに、静的な横荷重が作用して初期変位がある場合は式(19)を解いて¹⁵⁾

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \frac{\sqrt[3]{27e^2\alpha q + \sqrt{108e^3(k - pn)^3 + 729e^4\alpha^2 q^2}}}{3\sqrt[3]{2}e} \\ - \frac{\sqrt[3]{2}(k - pn)}{\sqrt[3]{27e^2\alpha q + \sqrt{108e^3(k - pn)^3 + 729e^4\alpha^2 q^2}}}. \end{aligned} \quad (26)$$

他に1対の共役複素解があるが捨てられた(式(26)も実数根のみが意味を持つ)。

式(26)は、軸荷重 p と横荷重 α があるときの静的な変位(平衡状態) $\bar{\sigma}$ を表す。 α をパラメータとして p に対する $\bar{\sigma}$ を図9にプロットした。

さらに、式(26)を式(23)に代入すれば、軸荷重 p と横荷重 α があるときの固有振動数 ω_1 を計算できる。これも α をパラメータとして p に対する ω_1 を図10に示す(モデルとして両端単純支持梁の場合の図は教科書^{9,16)}を参照されたい)。

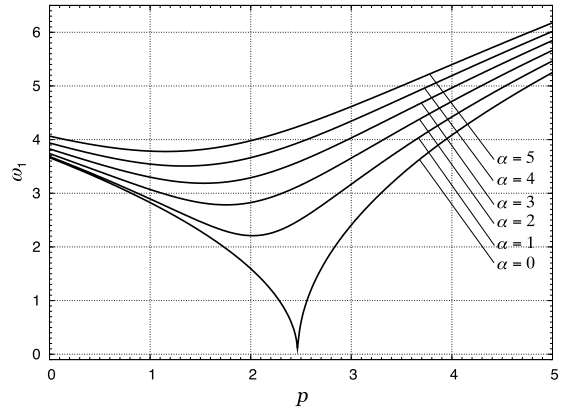


図10 軸荷重 p と横荷重 α に対する固有振動数 ω_1

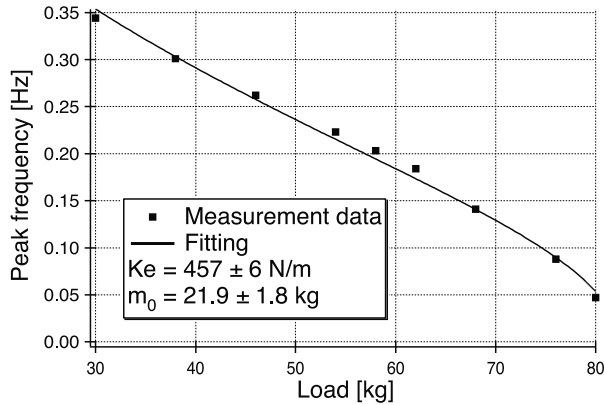


図 1 1 荷重 (kgf) に対する共振周波数 (Hz)⁶⁾

図 9, 図 10 は横軸が軸荷重 p で縦軸が静的たわみ (図 9) と固有振動数 (図 10) であり, 横荷重 α の違いにより複数の曲線が描かれている. なお図 10 において, 式 (17) の係数 m に含まれている leg と top table の慣性モーメントは $J^* = 0$ として計算した. $J^* > 0$ の場合は, これが大きくなるほど ω_1 の数値が低下し, 相似形を保ちながら上から圧縮された曲線概形となる.

図 9, 図 10 で $\alpha = 0$ のとき曲線が折れ曲がる点が $p = p_{cr}$ の限界荷重 ($= \pi^2/4$) である. また, 図 10 で $\alpha = 0, p = 0$ の点では $\omega_1 \approx 3.669$ である. 厳密解は $\omega_1 \doteq 3.516$ であるから約 4.2% の誤差^{9,10)} である.

図 1 1 は実際の IP における (IP の leg+top table の質量を m_0 kg として) 軸荷重 $(M - m_0)g/9.8$ kgf と共振周波数が測定された結果⁶⁾ である. これは無次元化した軸荷重 $(M - m_0)g/(EI/l^2)$ に対する固有振動数の測定に相当し, 本報告の定義である $p \equiv Mg/(EI/l^2), \omega_1 \equiv \Omega_1/\omega_0$ と見比べると図 1 0 における $\alpha = 0, p < p_{cr}$ の ω_1 に対し m_0 を除いた影響が少ない $p \lesssim p_{cr}$ の部分と相似であり, 式 (24) の傾向を示している.

なお, 共振周波数は地面振動 (変位 \propto 周波数⁻²) が IP に加えられているときの応答変位 (スペクトル) のピークとなる周波数である. 地面振動 (変位と周波数の関係は考慮する) はホワイトノイズであるから, その応答はインパルスレスポンスに相当し, ピーク周波数が固有振動数を与える.

図 1 2 も同じ IP において, IP top table に対して水平方向 (X,Y : 直交する 2 方向) に offset を与えたときの共振周波数である⁶⁾. 図の縦軸と横軸の数値が offset を設定するための電圧値 (横荷重 α に比例) であり, X 方向は 2 V が 1.9 mm, Y 方向では 2 V が 1.5 mm にキャリブレーションされている. 図中の X:xx が X 方向振動の共振周波

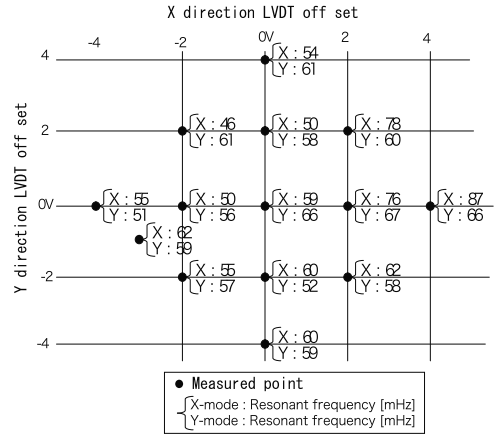


図 1 2 Offset (V) と共振周波数 (mHz)⁶⁾

数 mHz で Y:yy は Y 方向振動である. Offset が大きい方が共振周波数が高くなる傾向が認められる. 図 1 0 において, $p < p_{cr}$ で $p = \text{const.}$ のときの α の違いによる ω_1 の変化と傾向が一致している.

さらに, 現実の組立精度や材料特性などの条件により, わずかに X と Y 方向に異方向性が表れている. この場合, 真の固有振動数 $\approx \sqrt{X:xx^2 + Y:yy^2}/\sqrt{2}$ である. すると, $Y \approx 0$ V, $X \lesssim -2$ V 付近に最小値があり, この offset 値のときに IP が, ほぼ, 垂直であることを示している. このことは人為的に与える offset = 0 でも, たわみ $\sigma \neq 0$ があることを意味しており, 式 (4) や図 4 が示すように荷重 (P N) が偏心 (e m) して作用しているためにモーメント (Pe) が生じていることが推定される. これはたわみを起こす点で $\alpha \neq 0$ と等価である. よって, top table 上に負荷する荷重のバランスにも注意を払う必要があることが分かる.

以上, 図 1 0 は定性的に実際の近似であるといえる. 図 9 には相当する実験データはないが, 上記の結果をもたらす荷重と変位関係, つまり, 静的な復元力特性を表している. すなわち, $\alpha = 0$ の場合は, $p < p_{cr}$ のとき IP は $\sigma = 0$ で垂直, $p \geq p_{cr}$ となったら $\sigma > 0$ となつてたわみが生じる. これは図 3 右の空白を埋めるものである.

さらに, $\alpha > 0$ が加われば p によらず σ と ω_1 は増加する. これは, flex joint に作用する軸力 n_x は初期の軸荷重 $n_{x0} = -p$ に, たわみ $\eta = \zeta\sigma$ の非線型な関数成分が加わる (式 (12)) からである. この n_x が flex joint に生じる復元力となるから, $p \geq p_{cr}$ か, $p < p_{cr}$ でも $\alpha > 0$ で復元力が増して ω_1 が上昇する (式 (23)). そして, $\alpha \approx 0$, かつ, $p < p_{cr}$ のときは $|n_{x0}| = |-p|$ が増大すると $k - np$ が減少して ω_1 が低下する (式 (24)).

このように, IP の力学特性は座屈理論で理解でき, 固有振動数 ω_1 は軸荷重 p と横荷重 α という

二つのパラメータに支配されていることが明らかとなった。

また、図9において $p < p_{cr}$ では $\alpha > 0$ が加えられると直ちにたわみ $\bar{\sigma} > 0$ が生じるが、 $\alpha = 0$ に戻れば $\bar{\sigma} = 0$ となる。すなわち、 $p < p_{cr}$ では $\bar{\sigma} = 0$ が安定である。

一方、 $p \geq p_{cr}$ では α によらず $\bar{\sigma}(\alpha) > 0$ であり、 $\alpha > 0$ ではその値に応じてたわみが増すが、 $\alpha = 0$ となった場合は $\bar{\sigma} = 0$ ではなく $\bar{\sigma}(\alpha = 0) > 0$ へ戻る。したがって、この状態が安定となる。

よって、 $p = p_{cr}$ で平衡点の安定性に交代が生じている。これは分岐現象（カオス理論）においてピッチフォーク分岐（pitchfork bifurcation）に分類される¹⁷⁻¹⁹）。

6. 数値評価

固有振動数に対する座屈理論に基づくエネルギー法による近似解法の結果は定性的に現実の現象をよく近似していることが分かった。そこで限界荷重などを数値的に評価する。

有次元の軸荷重 $P = Mg$ N の限界荷重は

$$P_{cr} = p_{cr} \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \quad (27)$$

である（線形解析による式(3)と一致）。

Flex joints の材質はマルエージング鋼（maraging steel）で、ヤング率 $E = 186$ GPa である²⁰）。

形状は、直径 $d = 8.2$ mm で長さ $l = 47$ mm の円柱状である。この場合の断面二次モーメントは $I = \pi d^4/64$ である。よって

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (186 \times 10^9 \text{ Pa}) \cdot \left\{ \frac{\pi}{64} (8.2 \times 10^{-3})^4 \text{ m}^4 \right\}}{4 (47 \times 10^{-3})^2 \text{ m}^2} \\ = 4.61 \times 10^4 \text{ N} = 4.7 \times 10^3 \text{ kgf.}$$

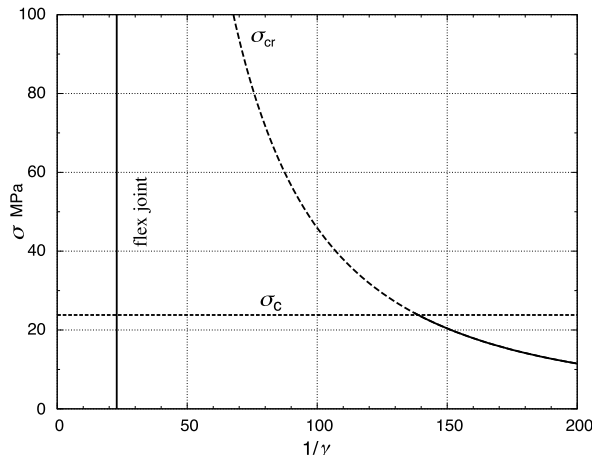


図13 細長比 $1/\gamma$ と限界応力 σ_{cr} 、圧縮強度 σ_C

限界荷重 P_{cr} N を断面積 A m² で除した量が限界応力 σ_{cr} Pa である。よって、

$$\sigma_{cr} = \frac{4.61 \times 10^4 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} (8.2 \times 10^{-3})^2 \text{ m}^2} = 8.73 \times 10^8 \text{ Pa}$$

で、 $\sigma_{cr} = 873$ MPa である。

一方、材料が圧縮によって潰れる限界的な応力を圧縮強度（compressive strength） σ_C という（潰れ方により、どの時点が限界点か正確には求めにくいのでフックの法則の比例限界を採用）。

$$\sigma_C = 23.8 \text{ MPa}$$

である²¹）。すると、

$$\sigma_{cr} \gg \sigma_C$$

であった。このことは、材料が座屈する前に圧縮強度を越えてしまうということを意味している。しかし、図11を見れば明らかに現実の限界荷重は遙かに小さいことが予想される。

これは座屈理論の適応性の問題である。限界荷重の定義式から

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EA r^2}{l^2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot EA \gamma^2, \\ \therefore \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2}{4} E \gamma^2. \quad (28)$$

細長比 $1/\gamma$ と限界応力 σ_{cr} の関係をプロットすると図13の曲線となる。Flex joint の細長比は

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{\frac{\pi}{64} d^4}{\frac{\pi}{4} d^2}}} = \frac{l}{\frac{d}{4}} = \frac{47 \times 10^{-3}}{\frac{8.2 \times 10^{-3}}{4}} = 22.9$$

である。ところが、図13から flex joint の場合

$$1/\gamma \approx 140$$

に座屈理論が適応可能である（曲線の実線部分）。

実用上の対応として $1/\gamma$ と σ_{cr} の関係を与える各種の実験式が提案されている^{8,14,23}）。

7. 剪断応力

座屈理論は IP のふるまいを定性的に説明するが、限界荷重の理論値が非現実的で定量的な議論に耐えない。そこで、理論を少し修正して適応が可能となる方策を探ってみる。

4節の冒頭に解析する上で基本的な仮定が導入されている。その最初の項目が細長梁の仮定である。細長梁の場合は変形の際に、曲げ応力が主要であるという仮定が成立する。実際には断面の内部にも剪断応力（shearing stress）が発生してい

る. 十分に細長い梁では断面積が小さく, 剪断応力の分布を無視できるのである.

そこで, flex joint のように細長比が小さい場合は剪断応力の効果を検討してみる価値がある.

4, 5 節の議論の修正点を掲げる. まず, ポテンシャルエネルギーは曲げひずみエネルギー (\tilde{U} の記号を \tilde{U}_b に変更) に加えて, 剪断ひずみエネルギー \tilde{U}_s の和で与えられる²²⁾.

$$\tilde{U}_s = \iiint_V \frac{1}{2} \tau_x \gamma_x dV = \int_0^l \int_A \frac{1}{2} G \gamma_x^2 dA dx$$

である. ここに, τ_x Pa は x 軸に直交する断面内に作用する剪断応力, γ_x は剪断ひずみ (shearing strain) で, G Pa は剪断弾性係数 (shear modulus) であって, 微小要素に対するフックの法則

$$\tau_x = G \gamma_x$$

を適用した.

剪断応力の断面内の分布は中立軸で最大となる. 最大剪断応力を τ_{\max} と書くと

$$\gamma_x = \frac{\tau_{\max}}{G}$$

で求められる²⁴⁾. τ_{\max} は図 1 4 を参照しつつ解析すると

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \tau_{\text{mean}} = \frac{4F}{3A}$$

と表される²⁵⁾. τ_{mean} は断面の平均剪断応力で, F N は断面に作用する剪断力である. F は軸荷重 $P = Mg = N_{x0}$ を用いて

$$F = -N_{x0} \frac{\partial v}{\partial x}$$

と書ける²⁶⁾.

以上を総合して

$$\gamma_x = -\frac{4N_{x0}}{3GA} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (29)$$

剪断ひずみエネルギー \tilde{U}_s は

$$\tilde{U}_s = \int_0^l \int_A \frac{8}{9GA^2} \left(N_{x0} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dA dx. \quad (30)$$

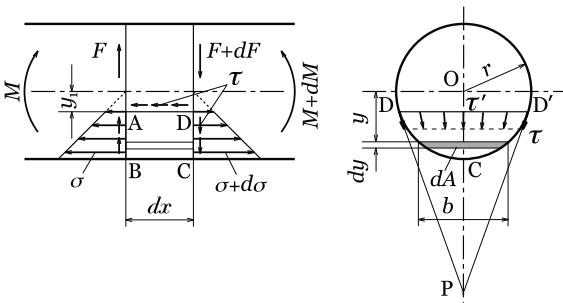


図 1 4 断面内に生じる剪断応力分布

式 (30) を式 (6) に加えて計算すると式 (11) が

$$\begin{aligned} & - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\hat{H}(\eta, \tau) \delta \eta d\xi \right. \\ & + \left[\left(J^* \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} - m_x \right) \delta \theta \right]_{\xi=1} - \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right]_{\xi=0} \\ & + \left[\left\{ \left(n_x + \Gamma n_{x0}^2 \right) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \right\} \delta \eta \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \Big] d\tau = 0. \quad (31) \end{aligned}$$

ただし,

$$\hat{H}(\eta, \tau) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \left(n_x + \Gamma n_{x0}^2 \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \alpha$$

であり,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{16}{9GA} \frac{EI}{l^2} = \frac{16Er^2}{9Gl^2} \\ &= \frac{16 \{ 2(1+\nu)G \} \gamma^2}{9G} = \frac{32}{9} (1+\nu) \gamma^2. \end{aligned}$$

ここに, 弾性係数間の関係から $E = 2(1+\nu)G$ で¹⁴⁾, ν はポアソン比 (Poisson's ratio) である. マルエージング鋼の場合は $\nu = 0.3$ と仮定 (金属材料全般がこの程度) すると, $\gamma \approx \sqrt{(9/32)/(1+\nu)} \doteq 0.465$ において $\Gamma < 1$ である. flex joint の場合, $\gamma = 1/22.9 \doteq 0.0437$. よって, $\Gamma \doteq 0.0088$ となる.

すると, 式 (17) が

$$\begin{aligned} & \sum_j M_{ij} \ddot{\sigma}_j + \sum_j \left(K_{ij} - \lambda N_{ij} \right) \sigma_j \\ & + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} \sigma_j \sigma_k \sigma_l - \alpha Q_i = 0. \quad (32) \\ & (i, j, k, l = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\lambda = p - \Gamma p^2.$$

計算を継続し最終的に, 限界荷重に対応する

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4}$$

を得る.

よって, 本来の限界荷重 p_{cr} が少し修正される. p について解くと

$$\begin{aligned} & \Gamma p^2 - p + \frac{\pi^2}{4} = 0, \\ \therefore p &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - \Gamma \pi^2}}{2\Gamma} \\ &= \frac{1}{2\Gamma} \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{1}{2} \Gamma \pi^2 - \frac{1}{8} \Gamma^2 \pi^4 - \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

ただし、 $|\Gamma\pi^2| < 1$ を適用している。複号のうち負号を採ると、

$$\begin{aligned} p &\approx \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^4}{16}\Gamma + \frac{\pi^6}{32}\Gamma^2 + \dots \\ &\approx \frac{\pi^2}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2}\Gamma + \frac{4}{8} \left(\frac{\pi^2}{2}\Gamma \right)^2 + \dots \right\} \\ &\approx \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{2}\Gamma}}. \end{aligned} \quad (33)$$

剪断応力を考慮すると、ひずみエネルギーが増大し、そのため復元力も増すこととなって限界荷重もわずかながら増加することが分かった。

理論的な限界荷重を低下させて、現実への適性の拡張を目指した立場からは望ましくない結果であるが、現実的に機械や構造物の設計・製造を行う立場からは、定性的、かつ限定的であるにせよ、限界荷重が増加するのは好ましい結果である。

ここまでの議論では、柱(梁)の断面は変形後も中立軸に直交しているという仮定(ベルヌーイ・オイラーの仮説)の下に組立てられている。しかし、細長比が小さい場合は剪断変形により断面が任意に回転(面外剪断変形)し、さらに断面形状が歪むことも想定される。これらの変形のためにエネルギーが費やされ、本来のたわみに寄与するエネルギーに損失が生じるというシナリオも考えられる。その場合は剪断ひずみエネルギーには負号が付される。手続としては Γ を $-\Gamma$ に置換える。結果として、

$$\Gamma p^2 + p = \lambda = \frac{\pi^2}{4}$$

である。 p について解き、限界荷重が

$$\begin{aligned} p_{\text{cr}} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \Gamma\pi^2}}{2\Gamma} \\ &= -\frac{1}{2\Gamma} \left\{ 1 \mp \left(1 + \frac{\pi^2}{2}\Gamma - \frac{\pi^4}{8}\Gamma^2 - \dots \right) \right\} \\ &\approx \frac{\pi^2}{4} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2}\Gamma + \frac{4}{8} \left(\frac{\pi^2}{2}\Gamma \right)^2 - \dots \right\} \\ &\approx \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2}\Gamma}}. \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、複号は負号を採った。この場合は、わずか(約2%)ながら限界荷重の低下が予想される。

ベルヌーイ・オイラーの仮説に基づく梁(柱)をオイラー梁(Euler beam)と言う。変形前に中立軸に垂直な断面は、変形後に中立軸に対して新たな回転角度をもつ平面となると仮定を緩和し、この回転角を新たな自由度とし、他に回転慣性の効果も含めた梁の解析モデルをチモシェンコ梁(Timoshenko beam)と言う^{27,28)}。より本格的にはチ

モシェンコ梁を座屈理論に適用することを考える必要がある。

8. まとめ

重力波干渉計 TAMA300 は 2007 年に低周波防振装置(SAS)を導入した。これにより、0.2 Hz以上の周波数帯で振動の絶縁性能が10倍以上の向上を果たした。SASの固有振動数は50 mHz程度であり、これ以上の周波数領域で振動絶縁の効果を発揮する。

SASの低い固有振動数に寄与しているのが倒立振り子(IP)である。IPは2.5 m程の直立した柱状の構造物である。IPは柱の上端に負荷される荷重が増加すると固有振動数が低下するという特性がある。また、柱の上端に横荷重が加わっても固有振動数が変化する。

これらの特性は長柱の座屈理論で理解できる。固有振動数の近似計算には修正ガラーキン法を用いた。解析の結果、IPの復元力特性、および、軸荷重、横荷重と固有振動数の関係が明らかとなった。

座屈理論による帰結として、IPの固有振動数は軸荷重と横荷重の二つのパラメータに支配されていることが分かった。

ひとつは、軸荷重の増加が固有振動数の低下を誘発するという特性が、SASの機能として取り込まれ有効に活用されている。もうひとつは、横荷重が加わると固有振動数が上昇する特性である。横荷重は人為的にoffsetを与えたとき生じ、軸荷重がアンバランスなときの偏心荷重によって生じるモーメントも横荷重と等価である。したがって、固有振動数を望みの値に設定するには、軸荷重とともに横荷重もコントロールする必要がある。

IPがコンパクトに低周波数の固有振動数を達成できることは大きな利点として認識されている。これは座屈現象における稀有有効利用の一例である。

一般には剛性の低下を招き障害となることが多い。例えば、ロケットの打ち上げの際には大きな垂直荷重が発生するので、本体と搭載される衛星の設計に対して座屈への検討と対策が必要である。

座屈現象に対する理解の深化と普遍化がLCGTなどの計画実現に寄与するものと確信する。

謝辞

藤本真克 重力波プロジェクト推進室長、ならびに、川村静児 准教授には、解析の過程の折々に有益なご議論を戴いた。

ここに、記して深謝の意を表す。

参考文献

- 1) R. Takahashi, K. Arai, D. Tatsumi, M. Fukushima, T. Yamazaki, M.-K. Fujimoto, K. Agatsuma, Y. Arase, N. Nakagawa, A. Takamori, K. Tsubono, R. DeSalvo, A. Bertolini, S. Márka, and V. Sannibale: Operational status of TAMA300 with the seismic attenuation system (SAS), *Classical and Quantum Gravity*, **25**, 114036-114043 (2008).
- 2) A. Takamori: *Low Frequency Seismic Isolation for Gravitational Wave Detectors*, PhD thesis, Department of Physics School of Science University of Tokyo (2002).
- 3) S. Márka, A. Takamori, M. Ando, A. Bertolini, G. Cella, R. DeSalvo, M. Fukushima, Y. Iida, F. Jacquier, S. Kawamura, Y. Nishi, K. Numata, V. Sannibale, K. Somiya, R. Takahashi, H. Tariq, K. Tsubono, J. Ugas, N. Viboud, C. Wang, H. Yamamoto, and T. Yoda: Anatomy of the TAMA SAS seismic attenuation system, *Classical and Quantum Gravity*, **19**, 1605-1614 (2002).
- 4) G. Losurdo, D. Passuello, P. Ruggi: The control of the Virgo Susperattenuator revised (I). Inertial Damping: present and future, *VIRNOT-FIR-1390-318*, 1 (2006).
- 5) A. Takamori, P. Raffai, S. Márka, R. DeSalvo, V. Sannibale, H. Tariq, A. Bertolini, G. Cella, N. Viboud, K. Numata, R. Takahashi, and M. Fukushima: Inverted pendulum as low-frequency pre-isolation for advanced gravitational wave detectors, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, **A 582**, 683-692 (2007).
- 6) 我妻一博: 重力波検出器 TAMA300 における低周波防振装置 SAS の性能評価および制御方法についての研究, 東京大学理学系研究科物理学専攻修士論文 (2007).
- 7) K. Kuroda, N. Kanda, M. Ohashi, Y. Saito, R. Takahashi, M. Ando, N. Mio, S. Telda, S. Moriwaki, T. Uchiyama, T. Tomaru, T. Suzuki, S. Miyoki, A. Takamori, D. Tatsumi, and LCGT Collaboration: Experimental Efforts to Detect Gravitational Waves — Large Scale Cryogenic Gravitational Wave Telescope —, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **163**, 54-99 (2006).
- 8) 黒木剛司郎: 材料力学, 森北出版, pp169-177 (1967).
- 9) 永井健一: ダイナミクスのシステム解析, 森北出版, pp102-137 (2000).
- 10) 小林繁夫: 振動学, 丸善, pp77-84 (1994).
- 11) 文献⁹⁾の p87, 101.
- 12) 丸山真一, 永井健一, 藤原久嘉, 山口誉士夫: 端部質量を有するはりの非線形連成振動における軸方向慣性を考慮した解析, 日本機械学会論文集 (C編) **73** 巻, 1045-1051 (2007).
- 13) 永井健一, 丸山真一, 武藤康太, 山口誉士夫: 先端を弦張力で拘束された片持ちはりの非線形振動解析, 日本機械学会論文集 (C編) **74** 巻, 1080-1086 (2008).
- 14) 日本機械学会: JSME テキストシリーズ材料力学, 丸善, pp119-130 (2007).
- 15) **WOLFRAMRESEARCH**, *Mathematica 7*, 2009.
- 16) 文献¹⁰⁾の pp72-76.
- 17) 下条隆嗣: カオス力学入門—古典力学からカオス力学へ—, 近代科学社, pp66-68 (1992).
- 18) 文献⁹⁾の pp138-192.
- 19) 小室元政: 新版 基礎からの力学系—分岐解析からカオスの遍歴へ—, サイエンス社, pp79-110 (2002).
- 20) 日本機械学会: 機械工学便覧 デザイン編 β 2 材料学・工業材料, 丸善, p254 (2006).
- 21) 日下邦男, 岩丸正明, 高木政明: 高強度マルエージング鋼の緒特性について (高強度マルエージング鋼の研究—II), 鉄と鋼, 日本鐵鋼協會々誌, **56(4)**, S212 (1970).
- 22) 日本機械学会: 機械工学便覧 基礎編 α 3 材料力学, 丸善, pp30-31 (2005).
- 23) 文献²²⁾の pp40-45.
- 24) 文献¹⁴⁾の p88.
- 25) 文献⁸⁾の pp59-66.
- 26) S. P. Timoshenko and J. M. Gere: *Theory of Elastic Stability. Second edition*, McGraw-Hill Book Co., pp132-135, (1961).
- 27) S. P. Timoshenko, D. H. Young, and W. Weaver Jr: *Vibration Problems in Engineering, Fourth edition*, John Wiley & Sons., pp432-435 (1974).
- 28) 日本機械学会: 機械工学便覧 基礎編 α 2 機械力学, 丸善, pp102-103 (2004).