国立天文台報　第 12 巻，13–22（2009）

回転運動成分を抑制した振り子の開発実験

石崎秀晴，福田武夫，西野徹雄，新井宏二

(2008 年 10 月 31 日受付；2009 年 1 月 30 日受理)

Development and Experiments of a Pendulum with Suppressed Rotational Motion.

Hideharu ISHIZAKI, Takeo FUKUDA, Tetsuo NISHINO, and Koji ARAI

Abstract

We investigated the design method of a double pendulum which suppresses rotational motion and only exhibits translational motion. We looked for the mechanical condition of $|\theta_2/\theta_1| \ll 1$ on the physical pendulum, where θ_1 and θ_2 are the angular displacement of the first and the second pendulums. Through the design and the experiments, we found that when the resonant frequency of each stage ($\omega_1$and ω_2) satisfies $\omega_2 \ll \omega_1$ and the ratio of the pendulum radius saitisfies $r_2/r_1 = \alpha \ll 1$, the above condition is fullfilled as $|\theta_2|/|\theta_1| = \alpha$ at the $\omega \gtrapprox \omega_1$.

1. はじめに

国立天文台において，基線長 300 m のレーザー干渉計型重力波検出器（TAMA300）が 1998 年に完成し，世界に先駆けて大型干渉計による観測実験が開始された [1)]．さらに将来，神岡鉱山（岐阜県）にキロメートル級大型低温干渉計（Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope：LCGT）の建設計画 [2)] が進められている．

TAMA300，LCGT などのレーザー干渉計では，レーザー反射鏡がワイヤーにより懸架されている．ワイヤーとこれに吊られた反射鏡は，力学的な観点からは，振り子の「ひも」と「おもり」とみなすことができる．そしてひもとおもりで構成される振り子系は多段にわたって懸架されている．その最終段のようすを図 1 に示す．レーザー光はおもり（反射鏡）の端面で反射される．

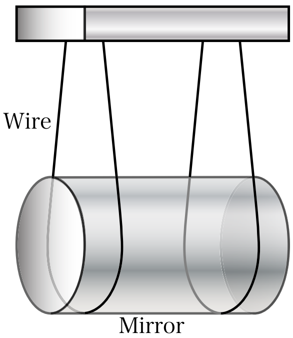

図 1　レーザー干渉計における振り子系の最終段

この振り子系の運動を考えてみる．天井（図 1 で直方体の部分）を固定して一段のみの振り子としたときの 1/4 周期のあいだの運動のようすを簡単化して図 2 に描いた．左端の図がひもが垂直の状態（速度は最大）で，右端の図ではひもが約 15 °ほど傾いた状態である（速度はゼロ）．

ひとつのおもりを平行に張られた二本のひもで吊っていることにより，おもりは振り子のひもの長さを半径とする円軌道上を運動しているのであるが，反射面は常に垂直の向きを保ったまま平行移動する．すなわち，回転運動なしに並進運動だけを行っている．

回転運動がなくなる理由を運動学（kinematics）の考え方に基づいて示す．天井と反射鏡の側面の中央付近には，おのおの二個づつの振り子の支点がある．それらが二本のひもとおもりと天井で結ばれている．これは四節リンク機構 [3)] としてモデル化される（図 3）．

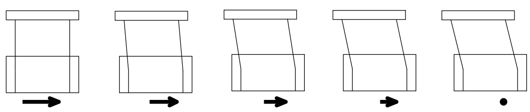

図 2　反射鏡の振動（1/4 周期）のようす

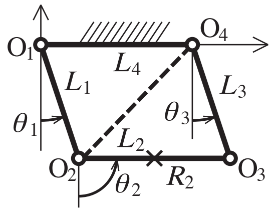

図 3　四節リンク機構

四節リンク機構（four bar mechanism）とは，$L_1 \sim L_4$ の 4 本のリンクが $\mathrm{O}_1 \sim \mathrm{O}_4$ の節点で結ばれて運動を伝達するシステムである．リンクは剛体の棒であり，節点には回転の自由度がある．

図 3 において，各リンクは L_i で表し，その長さも L_i，鉛直線から測る角度を θ_i としている．ただし，$i = 1 \sim 4$ である．図 1，図 2 との対応から，L_4 が天井，L_2 が反射鏡であり，L_1 と L_3 はワイヤーを表している．

いま，リンク L_4 を水平に固定し，リンク L_1 が外部から駆動されて O_1 回りに回転するときに，リンク L_2，L_3 の運動のようすを考える．そのために，角度 θ_2，θ_3 を θ_1 と定数だけで表せるか調べるのがリンク機構の角度解析である．

二本ある振り子のワイヤーの長さが完全に等しく，静止しているときに垂直である場合

$$L_1 = L_3, \quad L_2 = L_4$$

である．すると，

$$\triangle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4 \equiv \triangle \mathrm{O}_2\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4$$

であるから，

$$L_1 /\!/ L_3, \quad L_2 /\!/ L_4$$

となる．

よって，$\theta_2 = \pi/2$，$\theta_3 = \theta_1$ と表される．つまり，L_1 の回転や振動に伴って θ_1 がどのような値を採ろうとも，リンク L_1, L_2, L_3, L_4 は常に平行四辺形を形成するので L_2 が表す反射鏡はいつでも水平の状態を維持する．ゆえに，回転運動しないことが示された．

本来，われわれが知りたいのは図 1 の反射鏡の運動（変位と速度，加速度）である．それを考える場合は，リンク L_2 上に重心があるとき，その位置を R_2 とする．図 3 において R_2 の位置は O_2 を水平方向に平行移動すれば得られるから，O_2 の変位に定数値が加わるだけである．したがって R_2 の運動は O_2 で代表されるので L_1 だけを取出して，その運動が分かればよい．これは単振り子の運動そのものである．

すなわち，図 1 のような二点支持の振り子は単振り子であるにも関わらず，巧妙にリンク機構が組込まれているために並進運動だけが取出されている．振り子のおもりであるにも関わらず，反射鏡が並進運動だけで回転運動しないということは，レーザー干渉計にとっては有益な運動特性である．言うまでもなく，入射光に対して反射光が平行に折り返されるからである．

ここまで，振り子の運動には回転成分と並進成分があり，並進運動だけを抽出して利用している一例を掲げた．振り子の運動をレーザー光で検出する目的のためなら，おもりとしてコーナーキューブプリズムを用いてもよい．あるいは，図 3 を少し変形（例えば全体を 90° 回転し $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_4}$ を垂直に固定）するなど，いろいろな振り子＋四節リンク機構のバラエティが考えられる．それらによって多様な目的に即した運動が抽出されるであろう．

そこで，今後の応用や発展を担保するためにも，振り子そのものの運動特性の理解が重要と考える．本報告では直接的な装置開発は目標としないが，振り子のパラメータ（回転半径，質量や慣性モーメントなど）を適切に設計することにより並進運動だけを利用する方法の確立を目標とした．

具体的には，図 3 において L_3 を取り払ったような（リンク機構ではない）二段振り子においてパッシブな運動制御，すなわち，回転運動を抑制するような力学モデルを構築する検討を行い，力学設計に基づいて実験振り子を製作した．実験から，振り子の固有振動数より高い周波数帯域では回転運動が抑制されていると見なせるような特性が確認された．

以後，2 節では二段振り子の運動方程式を誘導し，これを解いて振り子の設計法を検討し 3 節にまとめた．4 節で周波数応答実験を実施して力学設計の結果を評価した．

2．二段振り子の運動方程式

図 1 のような二点支持ではなく，通常の振り子のように一本のひもだけで吊られたおもりは回転運動する．しかし，ひもとおもりの接合部の支点の作り方を工夫して，おもりがひもに対して回転できるようになっていたら，おもりの向きを一定にすることもできるかもしれない．

図 4 のような振り子を考察する．ひもの固定点は O_1 でおもりとの接合点が O_2 である．支点 O_2 ではおもりはひもに対して回転できる．おもりの重心は G_2 であり，O_2 と同一の点である G_1 はひ

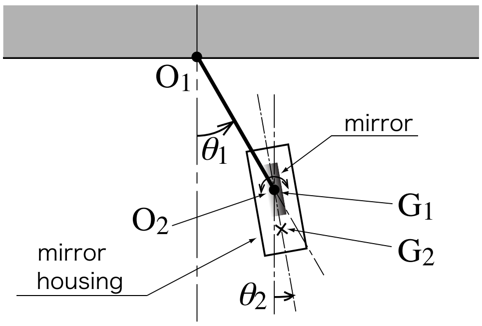

図 4　二段振り子への出発点

幾何学的な構成	
一段目の振り子	（図 4 の）ひもの部分※
二段目の振り子	反射鏡とハウジング
二段目の支点 O_2	一段目の重心 G_1 と一致
鏡の中心	二段目の支点 O_2 と一致
力学的な設計目標	
$|\theta_2/\theta_1| \ll 1$	

図 5 二段振り子の概念的な構成（物理振り子）
※実際には棒状の構造物である．

もに対するおもりの荷重の作用点である．

ひもの質量は無視する．ひもとおもりの回転変位は鉛直線から測り，それぞれ θ_1, θ_2 rad とする．

図 4 において O_1 を水平方向に振動させると G_1 が回転し，その並進成分が（O_2 と G_2 が有限の距離をもつために）O_2 回りに起すモーメントによって G_2 にも回転運動が生じる．結果として O_1 に起因する θ_1 と θ_2 の振幅はそれぞれ周波数に依存するであろう．したがって $\theta_1 \neq \theta_2$ となる．

それでは図 4 を出発点として，現実的な二段振り子とするために必要な構成を具体的に検討する．

まず，ひもの代りに質量と慣性モーメントを有する金属の棒を用いることにし，支点 O_1, O_2 の構造を付加して一段目の振り子とする．実験のための反射鏡，および，そのハウジングを二段目の振り子とし，一段目の振り子に固定された支点 O_2 の回りに回転する．図 4 における G_1 を一段目の振り子の重心と言換える．反射鏡は G_1 の水平変位を検出するためのターゲットである．

目標とする二段振り子は，二段目の振り子（反射鏡）の回転運動が抑制されたものである．これは二段目の回転角 θ_2 を抑制することであり，$|\theta_2/\theta_1| \ll 1$ の状態を実現するということである（θ_1, θ_2 が時計回りに振れたときは負号をつける）．

もし理想的に $\theta_2 = 0$ となり，二段目の振り子の回転運動が除去されて垂直の姿勢を保つことができれば反射鏡が二段目のどの位置にあっても，その運動は G_1 の並進変位を正しく反映する．

さらに，支点 O_2 と重心 G_1 を一致させる（O_1 からの距離を等しくする）．すると二段の単振り子のようにふるまう．

加えて，反射鏡の中心も O_2 に一致させておく．すると反射鏡は G_1 の並進運動を正確に検出し，θ_2 が残っていても，それから誘導される並進成分が付加されることはなくなる．その上で，θ_2 の回転運動が重畳されて誤差要因となるが，$|\theta_2/\theta_1| \ll 1$ により誤差も抑制される．

よって，この条件を実現する二段振り子の運動システム（力学モデル）を構築することに問題（目標）が帰着する．二段振り子の構成を簡単にまとめと図 5 となる．

力学モデルとして物理振り子（physical pendulum）を採用する（複振り子（compound pendulum），あるいは，剛体振り子（rigid pendulum）ともいう）．構造を持つという外見的な特徴から物理振り子モデルを採用するのが自然であるが，このモデルの重要な特徴は，G_1 と O_2 が一致するとは限らないことである（これは，単振り子（simple pendulum）の特徴）．これも構造を持つことによる自然な帰結である．したがって，図 5 に拘らず，当初は G_1 と O_2 が一致しないものとする（図 6）．

つぎに，二段振り子の運動方程式を誘導する．

一段目の回転半径 $\overline{O_1G_1} = r_1$ m で，質量は m_1 kg，G_1 回りの慣性モーメントを J_1 kg m^2 とする．

二段目に対して，回転半径 $\overline{O_2G_2} = r_2$ m で，質量は m_2 kg であり G_2 回りの慣性モーメントは J_2 kg m^2 である．

両支点間の距離 $\overline{O_1O_2} = l$ m とする．

各支点に作用する粘性，固体摩擦モーメントは後で考慮することにし，いまは働かないものとする．

支点と重心を含む平面内に x, y 二次元座標を採り，運動はこの平面内に限られる．

支点 $O_1(x_0, 0)$ には外部からの振動により，水

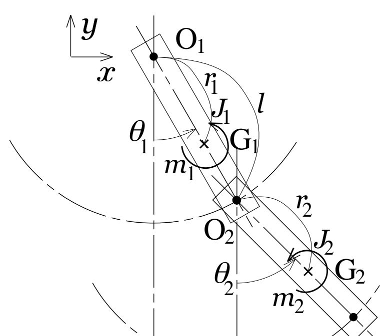

図 6　二段振り子の力学モデル（物理振り子）

平方向への振動変位 $x = x_0(t)$ が加えられている．鉛直 y 方向の加振はなく $y_0(t) \equiv 0$ とする．

図 6 から重心 $G_1(x_1, y_1)$ は回転運動による回転変位 θ_1 のほかに，並進運動による水平・垂直変位 x_1, y_1 と，重心 $G_2(x_2, y_2)$ には θ_2 と x_2, y_2 という合計 6 個の自由度を持つことが分かる．

ところが，振り子の腕は剛体であり変形しないので重心 G_1,G_2 は

$$x_1 = x_0 + r_1 \sin\theta_1, \tag{1}$$

$$y_1 = -r_1 \cos\theta_1, \tag{2}$$

$$x_2 = x_0 + l \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2, \tag{3}$$

$$y_2 = -l \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2 \tag{4}$$

と関係付けられる．この式 (1)〜(4) の四式は 4 個の束縛条件を与えるから結局，二段振り子の運動は角変数 θ_1, θ_2 など任意の 2 変数に対する 2 個の方程式を解くことにより完全に記述される．

系の運動エネルギー T J とポテンシャルエネルギー U J は，

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(J_1 + m_1r_1^2 + m_2l^2\right)\dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_0^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(J_2 + m_2r_2^2\right)\dot{\theta}_2^2 \\ &\qquad + m_2lr_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ &\qquad + \left(m_1r_1 + m_2l\right)\dot{x}_0\cos\theta_1\dot{\theta}_1 \\ &\qquad + m_2r_2\dot{x}_0\cos\theta_2\dot{\theta}_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U &= m_1gy_1 + m_2gy_2 \\ &= -m_1gr_1\cos\theta_1 \\ &\qquad - m_2g\left(l\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2\right).\end{aligned}$$

T, U をラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta_i} + \frac{\partial U}{\partial\theta_i} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

に代入すると，

$$\begin{aligned}&\left(I_1 + m_2l^2\right)\ddot{\theta}_1 + \left(m_1gr_1 + m_2gl\right)\sin\theta_1 \\ &+ m_2lr_2\left\{\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\ddot{\theta}_2 + \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_2^2\right\} \\ &\qquad + \left(m_1r_1 + m_2l\right)\ddot{x}_0\cos\theta_1 = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&I_2\ddot{\theta}_2 + m_2gr_2\sin\theta_2 \\ &+ m_2lr_2\left\{\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\ddot{\theta}_1 - \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\dot{\theta}_1^2\right\} \\ &\qquad + m_2r_2\ddot{x}_0\cos\theta_2 = 0\end{aligned} \tag{6}$$

を得る [4]．ここに，$\dot{\{\ \}} = d/dt, \ddot{\{\ \}} = d^2/dt^2$ である．さらに，$I_1 = J_1 + m_1r_1^2$, $I_2 = J_2 + m_2r_2^2$ は支点 O_1,O_2 回りの慣性モーメントである．

以下では，振り子の回転角が小さく，$\dot{\theta}_i^2 \approx 0$, $\sin\theta_i \approx \theta_i$, $\cos\theta_i \approx 1$ と近似できるものとする．その上で，$\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ を二式に分けて整理すると

$$\begin{aligned}&\left(1 - \beta^2\right)\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2\theta_1 - \frac{g}{l}\beta^2\theta_2 \\ &\qquad = \left(\frac{\beta^2}{l} - \frac{\omega_1^2}{g}\right)\ddot{x}_0,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\left(1 - \beta^2\right)\ddot{\theta}_2 + \omega_2^2\theta_2 - \frac{m_1gr_1 + m_2gl}{m_2lr_2}\beta^2\theta_1 \\ &\qquad = \left(\frac{m_1r_1 + m_2l}{m_2lr_2}\beta^2 - \frac{\omega_2^2}{g}\right)\ddot{x}_0.\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，

$$\beta^2 = \frac{m_2^2l^2r_2^2}{\left(I_1 + m_2l^2\right)I_2}$$

であり，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{m_1gr_1 + m_2gl}{I_1 + m_2l^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{m_2gr_2}{I_2}}$$

は，一段目と二段目の固有角振動数（rad s^{-1}）である [5]．

重心 G_1,G_2 の x 座標を表す式 (1),(3) も θ_1, θ_2 が小さいとして線型化し整理すると，

$$x_1 - x_0 = r_1\theta_1, \tag{9}$$

$$x_2 - x_1 = r_2\theta_2 + \left(l - r_1\right)\theta_1. \tag{10}$$

式 (9),(10) は振り子運動の回転成分（θ_1, θ_2 ：右辺）と並進成分（x_0, x_1, x_2：左辺）の関係を表していることが分かる．

振り子の変位は O_1 における外部からの加振変位 x_0 と振り子自身の応答変位 x_1 がある．振動計のような用途を想定すると測定可能な変位は相対変位 $x_1 - x_0$ などである．

そこで，相対変位の変数 ξ_1, ξ_2 を

$$\xi_1 = x_1 - x_0, \quad \xi_2 = x_2 - x_1$$

と定義する．すると，式 (9),(10) は角変位と相対変位の変換関係式となっている．

方程式 (7),(8) に式 (9),(10) を代入すると

$$\begin{aligned}&\left(1 - \beta^2\right)\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 - \frac{\delta}{\alpha}\omega_2^2\xi_2 \\ &= \left(\frac{r_1}{l}\beta^2 - \frac{r_1}{g}\omega_1^2\right)\ddot{x}_0 - \frac{\delta}{\alpha}\omega_2^2\left(l - r_1\right)\theta_1,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\left(1 - \beta^2\right)\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 - \frac{\alpha\delta}{\mu}\omega_1^2\xi_1 = \left(\varepsilon\beta^2 - \frac{r_2}{g}\omega_2^2\right)\ddot{x}_0 \\ &\quad + \left(1 - \beta^2\right)\left(l - r_1\right)\ddot{\theta}_1 + \omega_2^2\left(l - r_1\right)\theta_1.\end{aligned} \tag{12}$$

ここに，

$$\alpha=\frac{r_2}{r_1},\qquad \delta=\frac{m_2lr_2}{I_1+m_2l^2},$$

$$\varepsilon=\frac{m_1r_1+m_2l}{m_2l},\quad \mu=\frac{I_2}{I_1+m_2l^2}$$

である．

さらに，これからの議論では粘性摩擦を考慮する（固体摩擦は未だ働かない）．支点 O_1,O_2 において，角速度 $\dot\theta_1,\dot\theta_2$ に比例する粘性摩擦モーメントが生じるものとして，その比例定数である減衰係数を $\mathit{\Gamma}_1,\mathit{\Gamma}_2$ $\mathrm{J\,s\,rad^{-1}}$ として，方程式 (5),(6) の右辺に加える．その上で式全体を線型化すると

$$\left(I_1+m_2l^2\right)\ddot\theta_1+\left(m_1gr_1+m_2gl\right)\theta_1 + m_2lr_2\ddot\theta_2+\left(m_1r_1+m_2l\right)\ddot x_0=-\mathit{\Gamma}_1\dot\theta_1, \quad (5)'$$

$$I_2\ddot\theta_2+m_2gr_2\theta_2+m_2lr_2\ddot\theta_1+m_2r_2\ddot x_0 =-\mathit{\Gamma}_2\dot\theta_2. \quad (6)'$$

整理して

$$\left(1-\beta^2\right)\ddot\theta_1+2\zeta_1\omega_1\dot\theta_1+\omega_1^2\theta_1-\delta\omega_2^2\theta_2 =\left(\frac{\beta^2}{l}-\frac{\omega_1^2}{g}\right)\ddot x_0, \quad (7)'$$

$$\left(1-\beta^2\right)\ddot\theta_2+2\zeta_2\omega_2\dot\theta_2+\omega_2^2\theta_2-\frac{\delta}{\mu}\omega_1^2\theta_1 =\left(\frac{\varepsilon}{r_2}\beta^2-\frac{\omega_2^2}{g}\right)\ddot x_0. \quad (8)'$$

ただし，

$$\zeta_1=\frac{\mathit{\Gamma}_1}{2\sqrt{\left(I_1+m_2l^2\right)\left(m_1gr_1+m_2gl\right)}},$$

$$\zeta_2=\frac{\mathit{\Gamma}_2}{2\sqrt{I_2m_2gr_2}}$$

は一段目と二段目の減衰比である．

式 (11),(12) の相対変位 ξ_1,ξ_2 に対応して

$$\left(1-\beta^2\right)\ddot\xi_1+2\zeta_1\omega_1\dot\xi_1+\omega_1^2\xi_1-\frac{\delta}{\alpha}\omega_2^2\xi_2 =\left(\frac{r_1}{l}\beta^2-\frac{r_1}{g}\omega_1^2\right)\ddot x_0-\frac{\delta}{\alpha}\omega_2^2\left(l-r_1\right)\theta_1, \quad (13)$$

$$\left(1-\beta^2\right)\ddot\xi_2+2\zeta_2\omega_2\dot\xi_2+\omega_2^2\xi_2-\frac{\alpha\delta}{\mu}\omega_1^2\xi_1 =\left(\varepsilon\beta^2-\frac{r_2}{g}\omega_2^2\right)\ddot x_0+\left(1-\beta^2\right)\left(l-r_1\right)\ddot\theta_1 +2\zeta_2\omega_2\left(l-r_1\right)\dot\theta_1+\omega_2^2\left(l-r_1\right)\theta_1. \quad (14)$$

得られた運動方程式 (13),(14) には相対変位 ξ_1,ξ_2 のほかに角変位 θ_1 が含まれている．

しかし，本節のはじめに検討した幾何学的な構成（図 5）に従って O_2 と G_1 を一致させると

$$l=r_1$$

となる．すると式 (13),(14) は大幅に簡素化される．以降の議論ではこの条件を適用する．

3. 二段振り子の設計

通常の解析の手順に従い，周波数応答（frequency responce）特性を調べる．

初期条件を

$$x_0(0)=\dot x_0(0)=\ddot x_0(0)=0,$$
$$\xi_1(0)=\dot\xi_1(0)=\ddot\xi_1(0)=0,$$
$$\xi_2(0)=\dot\xi_2(0)=\ddot\xi_2(0)=0$$

として，式 (13),(14) にフーリエ変換．

$$X_0(i\omega)=\mathcal{F}\left[x_0(t)\right],$$
$$X_1(i\omega)=\mathcal{F}\left[\xi_1(t)\right],$$
$$X_2(i\omega)=\mathcal{F}\left[\xi_2(t)\right]$$

を施す．すると

$$\left\{-\left(1-\beta^2\right)\omega^2+i2\zeta_1\omega_1\omega+\omega_1^2\right\}X_1-\frac{\delta}{\alpha}\omega_2^2X_2 =-\left(\beta^2-\sigma^2\right)\omega^2X_0, \quad (15)$$

$$-\frac{\alpha\delta}{\mu}\omega_1^2X_1+\left\{-\left(1-\beta^2\right)\omega^2+i2\zeta_2\omega_2\omega+\omega_2^2\right\}X_2 =-\left(\varepsilon\beta^2-\alpha\sigma^2\nu^2\right)\omega^2X_0. \quad (16)$$

ただし，関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(i\omega)$ は

$$F(i\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

である．$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位，ω $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ は角周波数を表す．また，

$$\sigma^2=\frac{r_1}{g}\omega_1^2,\qquad \nu=\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

式 (15),(16) を X_1, X_2 について解くと

$$H_1(i\lambda)=-\frac{X_1(i\lambda)}{\lambda^2X_0(i\lambda)} =\frac{-\lambda^2A_1+i\lambda B_1+C_1}{\lambda^4D-i\lambda^3E-\lambda^2F+i\lambda G+H}, \quad (17)$$

$$H_2(i\lambda)=-\frac{X_2(i\lambda)}{\lambda^2X_0(i\lambda)} =\frac{-\lambda^2A_2+i\lambda B_2+C_2}{\lambda^4D-i\lambda^3E-\lambda^2F+i\lambda G+H}. \quad (18)$$

ここに

$$\lambda=\frac{\omega}{\omega_1}$$

で，一段目の共振周波数で規格化された周波数を表す．また，記号 $A_i \sim C_i, D \sim H$ は

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left(1-\beta^2\right)\left(\beta^2-\sigma^2\right), \\
B_1 &= 2\zeta_2\nu\left(\beta^2-\sigma^2\right), \\
C_1 &= -\left(1-\beta^2\right)\sigma^2\nu^2, \\
A_2 &= \left(1-\beta^2\right)\left(\varepsilon\beta^2-\alpha\sigma^2\nu^2\right), \\
B_2 &= 2\zeta_1\left(\varepsilon\beta^2-\alpha\sigma^2\nu^2\right), \\
C_2 &= -\left(1-\beta^2\right)\alpha\sigma^2\nu^2, \\
D &= \left(1-\beta^2\right)^2, \\
E &= \left(2\zeta_1+2\zeta_2\nu\right)\left(1-\beta^2\right), \\
F &= \left(1+\nu^2+4\nu\zeta_1\zeta_2\right)\left(1-\beta^2\right), \\
G &= 2\zeta_1\nu^2+2\zeta_2\nu, \\
H &= \nu^2\left(1-\beta^2\right)
\end{aligned}
$$

である．

式 (17),(18) は支点 O_1 における水平方向の振動加速度

$$-\omega^2 X_0(i\omega) = \mathcal{F}\left[\ddot{x}_0(t)\right]$$

を入力信号，相対変位

$$
\begin{aligned}
X_1(i\omega) &= \mathcal{F}\left[\xi_1(t)\right] = \mathcal{F}\left[x_1(t)-x_0(t)\right], \\
X_2(i\omega) &= \mathcal{F}\left[\xi_2(t)\right] = \mathcal{F}\left[x_2(t)-x_1(t)\right]
\end{aligned}
$$

を出力信号とするときの入出力関係を表しており，周波数応答関数（frequency responce function）という．

これらを用いて，前節に示したように力学的な設計目標である $|\theta_2/\theta_1| \ll 1$ を満足するようなモデルを設計することが最終的な目標である．

そこでまず，式 (17),(18) の振幅特性と位相特性を特徴づける共振周波数と反共振周波数を調べておく．それぞれ，周波数応答関数の極大値と極小値を与える周波数である．

周波数応答関数に対して，その分母の関数 $=0$ と置いた根が共振周波数であり，反共振周波数は分子 $=0$ の根である．以下に，共振と反共振の周波数を求めるが，ここでは粘性摩擦モーメントが非常に小さいので減衰比 $\zeta_1=\zeta_2=0$ と近似することで計算を簡単化する．

共振周波数を求める式は

$$\left(1-\beta^2\right)\lambda^4-\left(1+\nu^2\right)\lambda^2+\nu^2=0$$

であるから，その根 $\lambda_{\mp}^2$ は

$$\lambda_{\mp}^2 = \frac{1}{2\left(1-\beta^2\right)}\left\{\left(1+\nu^2\right) \mp\sqrt{\left(1-\nu^2\right)^2+4\beta^2\nu^2}\right\} \tag{19}$$

となる [5]．式 (17),(18) の分母が等しいから一段目と二段目の共振周波数は共に λ_- と λ_+ である．

つぎに，式 (17) の分子から，

$$\left(\beta^2-\sigma^2\right)\lambda^2+\sigma^2\nu^2=0$$

の根が反共振周波数となる．$\beta^2<\sigma^2$ の場合に上式は正の実根 λ_{z1} をもつ．

$$\lambda_{z1} = \sqrt{\frac{\sigma^2\nu^2}{\sigma^2-\beta^2}} = \nu\left(1-\frac{\beta^2}{\sigma^2}\right)^{-1/2}. \tag{20}$$

一方，$\beta^2 \geqq \sigma^2$ の場合は周波数応答のグラフ上で反共振（λ_{z1}）が現れない．

式 (18) から

$$\left(\varepsilon\beta^2-\alpha\sigma^2\nu^2\right)\lambda^2+\alpha\sigma^2\nu^2=0.$$

こちらは $\varepsilon\beta^2<\alpha\sigma^2\nu^2$ のとき正の実根をもち，

$$\lambda_{z2} = \sqrt{\frac{\alpha\sigma^2\nu^2}{\alpha\sigma^2\nu^2-\varepsilon\beta^2}} = \left(1-\frac{\varepsilon\beta^2}{\alpha\sigma^2\nu^2}\right)^{-1/2}. \tag{21}$$

が反共振周波数である．これも $\varepsilon\beta^2 \geqq \alpha\sigma^2\nu^2$ の場合は反共振（λ_{z2}）が現れない．

特に $\varepsilon\beta^2=\alpha\sigma^2\nu^2$ のように等号が成立する付近では λ_{z2} の絶対値が大きくなり（高い周波数の方へシフトする），式 (18) において $\lambda \gg 1$ である高周波数領域では $|H_2| \propto \lambda^{-4}$ となり，振幅が周波数 λ の -4 乗に比例する．等号が成立しないときは $|H_2| \propto \lambda^{-2}$，これに対して一段目は常に $|H_1| \propto \lambda^{-2}$．すなわち，高周波数領域における一段目と二段目の間の絶縁性能が格段に向上することに留意するべきである．

共振，反共振周波数では，その前後の周波数で符号が逆転する．すなわち，位相が 180° 異なる．

さらに周波数応答関数のグラフの概形を調べる．まず低周波数領域のふるまいは，式 (17) から

$$\lim_{\lambda\to+0} H_1(i\lambda) = -\sigma^2. \tag{22}$$

式 (18) から

$$\lim_{\lambda\to+0} H_2(i\lambda) = -\alpha\sigma^2. \tag{23}$$

で，$\alpha=r_2/r_1>0$ であるから，$\lambda \ll 1$ のとき $\angle H_1(i\lambda)=\angle H_2(i\lambda)$（同相）である．つまり振り子の一段目と二段目は低周波では同方向に振れる．

式 (19) から $4\beta^2\nu^2/(1-\nu^2)^2 \ll 1$ であれば

$$\lambda_- \approx \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\nu^2\right)-\frac{1}{2}\left(1-\nu^2\right)} \approx \nu, \tag{24}$$

$$\lambda_+ \approx \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\nu^2\right)+\frac{1}{2}\left(1-\nu^2\right)} \approx 1. \tag{25}$$

これは，共振周波数は固有周波数にほぼ一致するという当然の結果を示している．

さらに，式 (20) から $\beta^2 \ll \sigma^2$ では

$$\lambda_{z1} \approx \nu. \tag{26}$$

式 (21) からも $\varepsilon\beta^2 \ll \alpha\sigma^2\nu^2$ のとき

$$\lambda_{z2} \approx 1. \tag{27}$$

よって，$\beta^2 \ll 1$ で ω_1 と ω_2 が接近してなければ

$$\lambda_- \doteqdot \lambda_{z1} \doteqdot \nu, \quad \lambda_+ \doteqdot \lambda_{z2} \doteqdot 1$$

あるいは，上式の各辺に ω_1 を掛けたものを

$$\omega_- \doteqdot \omega_{z1} \doteqdot \omega_2, \quad \omega_+ \doteqdot \omega_{z2} \doteqdot \omega_1$$

と書くと，各段の反共振周波数は，それぞれ，二つの共振周波数のいずれか一方に接近して現れることが分かる．

振幅に関しては，式 (22),(23) から

$$\frac{|H_2(+0)|}{|H_1(+0)|} = \alpha = \frac{r_2}{r_1} \tag{28}$$

であり，一段目から見た二段目の振幅は共振周波数の周辺を除いて低周波数の領域で $|\xi_2|/|\xi_1| = \alpha$（高い周波数では $|\xi_2|/|\xi_1| < \alpha$）となる．この回転半径比 α は一段目の並進運動振幅に対する二段目の絶縁性能の良否を示すパラメータでもある．

周波数応答関数 (17),(18) は運動方程式 (13),(14) の解の一部であり，その総てではない．また，実験によって得られる情報とも少し異なる．

まず，$H_1(i\omega)$ は支点 O_1 における水平方向加速度 $\ddot{x}_0(t)$ に対する相対変位 $x_1(t) - x_0(t)$ の応答を表しており，式 (17) は実験などで知りたい情報と一致している．

$$H_1(i\omega) = \frac{\mathcal{F}[x_1(t) - x_0(t)]}{\mathcal{F}[\ddot{x}_0(t)]}.$$

一方，$H_2(i\omega)$ は相対変位 $x_2(t) - x_1(t)$ の応答であるから，ただちに実験データと比較しにくい．実験データとしては，むしろ $x_2 - x_0$ が測定される．そこで，二段目に対しては式 (17),(18) の和

$$H_1(i\omega) + H_2(i\omega) = \frac{\mathcal{F}[x_2(t) - x_0(t)]}{\mathcal{F}[\ddot{x}_0(t)]}$$

を計算して実験データと比較する．

また，式 (9),(10) を用いて回転運動に対して

$$H_1(i\omega) = \frac{\mathcal{F}[\xi_1]}{\mathcal{F}[\ddot{x}_0]} = \frac{r_1\mathcal{F}[\theta_1]}{\mathcal{F}[\ddot{x}_0]} \equiv r_1\Theta_1,$$
$$H_2(i\omega) = \frac{\mathcal{F}[\xi_2]}{\mathcal{F}[\ddot{x}_0]} = \frac{r_2\mathcal{F}[\theta_2]}{\mathcal{F}[\ddot{x}_0]} \equiv r_2\Theta_2.$$

ただし，$\Theta_1 = \mathcal{F}[\theta_1]/\mathcal{F}[\ddot{x}_0]$, $\Theta_2 = \mathcal{F}[\theta_2]/\mathcal{F}[\ddot{x}_0]$ であり，一段目と二段目の回転運動に対する周波数応答関数である．

残りは鉛直方向 $\{y_1,\ y_2\}$ の並進運動に対する周波数応答関数だけであるが，微少量であり本質的でないので割愛する．

以上から仕様を達成するため，われわれが選択した力学系の設計方針は

(i)　$\omega_2 \ll \omega_1$ とする　$(\nu \ll 1)$.

共振周波数 ω_- と一段目の反共振周波数 ω_{z1} が一致する条件である．これにより，一段目と二段目の連成（coupling）を弱め近似的に一段のみの振り子のような特性を持たせる．そのためには ω_2 はできるだけ小さくして ω_1 と離すことにより ω_- と ω_{z1} の一致度が向上する．ω_1, ω_2 の定義をみると採り得る方法はいくつか考えられるが，現実的に $I_1 + m_2r_1^2 < I_2$ を実現しようとすると構造が複雑となる．そこで，$\alpha \ll 1$（すなわち $r_2 \ll r_1$）を目指すことになる．ただし，r_2 が極端に小さいと二段目の復元モーメント m_2gr_2 も小さくなるから，組立ての際の作業性を考慮して $r_2 \lessapprox 1$ mm とならないように注意する必要がある．

(ii)　$\varepsilon\beta^2 = \alpha\sigma^2\nu^2$ の条件を目指す．

これは二段目の反共振周波数 ω_{z2} を高周波側に追いやるための条件である．$\varepsilon\beta^2$ と $\alpha\sigma^2\nu^2$ の両者を近づけると，反共振周波数 $\omega_{z2} \gg \omega_+$ とし，一致させると $\omega_{z2} \to \infty$ にする（消滅させる）．

この結果，

1. 共振周波数 $\omega_- \doteqdot \omega_2$ におけるゲインの増大を抑制する．

2. 二段振り子の周波数応答関数が ω_1 のみの一段振り子の場合に近似的に一致する．

3. 二段目の振り子の振幅が一段目に対して防振され，総ての周波数領域で $|H_2| \lessapprox \alpha|H_1|$ が達成される．

4. 周波数 $\omega > \omega_1$ の領域で回転運動成分に対する周波数応答関数が $|\Theta_2| \lessapprox \alpha|\Theta_1|$ が実現．

という効果が生じて，反射鏡の運動としては並進成分が一段目（単独）の振り子とほぼ一致して，固有振動数以上の領域（$\omega > \omega_1$）で二段目の回転運動は一段目に対して α 倍に抑制されると期待できる．

決定した方針に従って，力学設計に基づき機械設計し，二段振り子を製作した．ただし，力学設計と機械設計は別個のものではなく，必要条件（方針：(i), (ii) のほかに仕様：$l = r_1$ など）を満たす

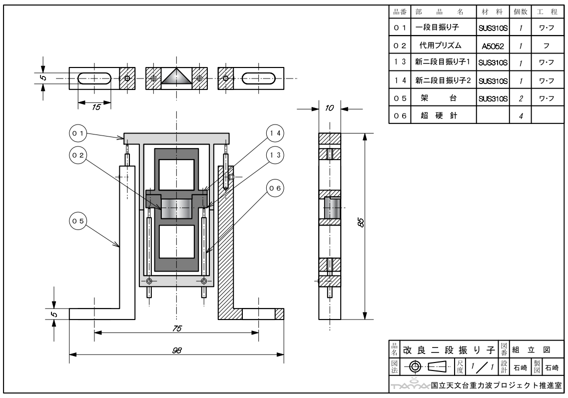

図 7　二段振り子の設計図面

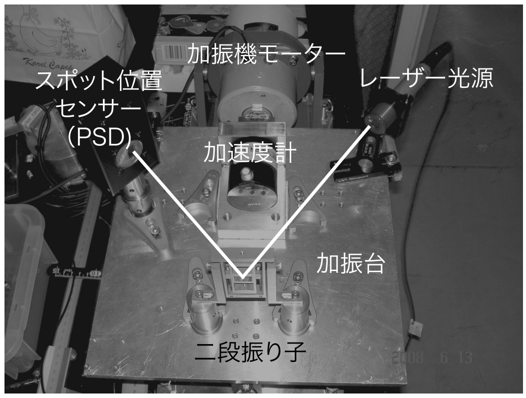

図 8　周波数応答実験のセットアップ

ように部品形状の製図とパラメータ計算を交互に繰返し実施した（方針 (i) における条件 $r_2 \gtrapprox 1$ mm と方針 (ii) は未達成）．

製作された二段振り子の具体的な図面を図 7 に示す．ハッチングの入ったL字型の部品が架台，薄い灰色の部品が一段目の振り子，濃い灰色の部品が二段目の振り子で，反射鏡が中心（$= \mathrm{G}_1$）に固定されおり，G_1 と O_2 が一致している．架台の上部と一段目の底辺部分に超硬針が上向きに取り付けられており，ピボット軸受（$\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$）を構成している．振り子部分の外形寸法は，高さ 75 mm，横幅 50 mm で厚さが 10 mm であり，重量は合計 100 g（重）である．

設計により決定されたパラメータは，

$$\alpha = 2.92 \times 10^{-2},\ \beta^2 = 7.82 \times 10^{-4},\ \varepsilon = 2.13,$$
$$\mu = 9.18 \times 10^{-2},\ \nu = 0.334,\ \sigma^2 = 0.717.$$

同時に回転半径 $r_1 = 29$ mm，$r_2 = 0.85$ mm も決まり，想定する固有振動数が $\omega_1 = 2\pi \times 2.48$ rad s^{-1}，$\omega_2 = 2\pi \times 0.83$ rad s^{-1} となった．

製作は先端技術センター・マシンショップにおいて板厚 10 mm の SUS310S 板をワイヤー放電加工により，くり抜く工法で実施された．

4．周波数応答実験

周波数応答実験のセットアップを図 8 に示す．図において，加振台と記載したアルミ製の板は前後（手前と奥）方向に並進運動する X ステージである．これに加振機モーター（ボイスコイルモーター）を接続して，前後方向へ加振する．モーターはランダムノイズ信号により駆動させる．ランダム信号発生と信号処理はスペクトラムアナライザー（Agilent 35670A）を使用した．

加振台の運動は加速度計（TEAC710）により測定する（入力信号）．加振台上の二段振り子の中心にある反射鏡の運動はレーザー光源と PSD（フォトダイオードによる Position Sensitive Detector）で観測する．PSD は受光面上のレーザースポットの水平・垂直位置を電気信号に変えて出力するものである．

観測方法は，反射鏡が回転運動すると受光面上でレーザースポットが上下（鉛直方向：y）に変位する．また，反射鏡が並進運動するとレーザー光の反射点が前後移動するからスポットは横（水平方向：x）に変位する．よって，PSD からの出力信号のうち x 信号は並進変位の出力信号，y 信号を回転角変位の出力信号とする．

測定データは，加速度計からの入力信号として電圧 $a(t)$ V と，PSD からの出力信号として並進運動の出力電圧 $x(t)$ V と回転運動の出力電圧 $y(t)$ V の三者を同時に 100 Hz で 100 秒間サンプリングし，これを 30 セット収録した．

測定データは離散フーリエ変換（FFT 演算）し，

$$\mathsf{H}_t(i\omega) = \frac{W_{ax}(i\omega)}{W_{aa}(i\omega)}, \quad \boldsymbol{\Theta}_2(i\omega) = \frac{W_{ay}(i\omega)}{W_{aa}(i\omega)}$$

を求めた．ここに，$W_{aa}(i\omega)$ は入力信号 $a(t)$ のパワースペクトル，$W_{ax}(i\omega)$ は $a(t)$ と出力 $x(t)$ のクロススペクトルで $W_{ay}(i\omega)$ は $a(t)$ と $y(t)$ のクロススペクトルであり，$i = \sqrt{-1}$ である．

そして，複素数である $\mathsf{H}_t, \boldsymbol{\Theta}_2$ の振幅と位相から

$$20 \log_{10} |\mathsf{H}_t(i\omega)| \ \mathrm{dB}, \quad 20 \log_{10} |\boldsymbol{\Theta}_2(i\omega)| \ \mathrm{dB},$$

$$\angle \mathsf{H}_t(i\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{Im}[\mathsf{H}_t(i\omega)]}{\mathfrak{Re}[\mathsf{H}_t(i\omega)]} \right\} \ \mathrm{degree},$$

$$\angle \boldsymbol{\Theta}_2(i\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{Im}[\boldsymbol{\Theta}_2(i\omega)]}{\mathfrak{Re}[\boldsymbol{\Theta}_2(i\omega)]} \right\} \ \mathrm{degree}$$

がそれぞれ，前節で解析的に求めた二段目の振り子に対する周波数応答関数 $H_1(i\omega) + H_2(i\omega)$ と $\Theta_2(i\omega)$ に相当する，周波数応答実験から求めた周波数応答である．ただし，$\mathfrak{Re}[\ \ ]$ と $\mathfrak{Im}[\ \ ]$ はカッコ内の関数の実部と虚部を表す記号である．

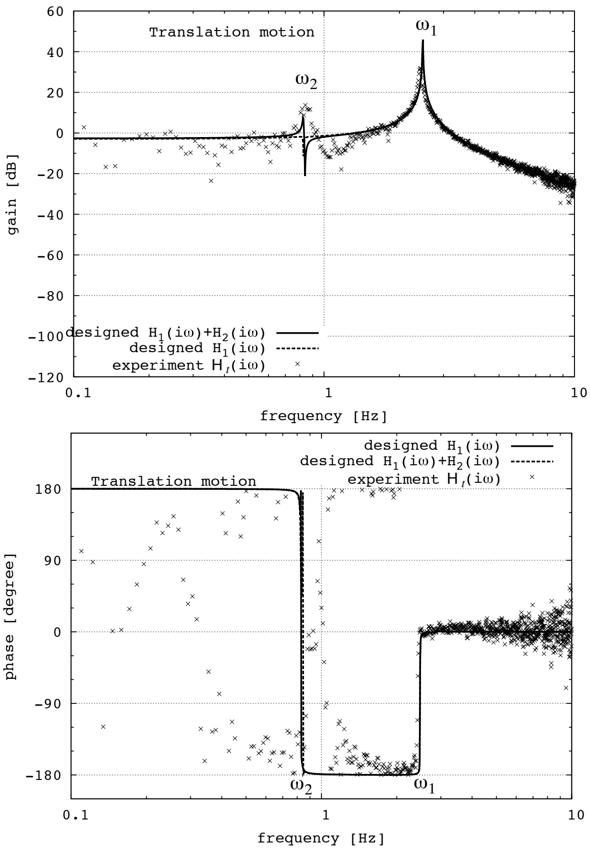

図 9　並進運動周波数応答

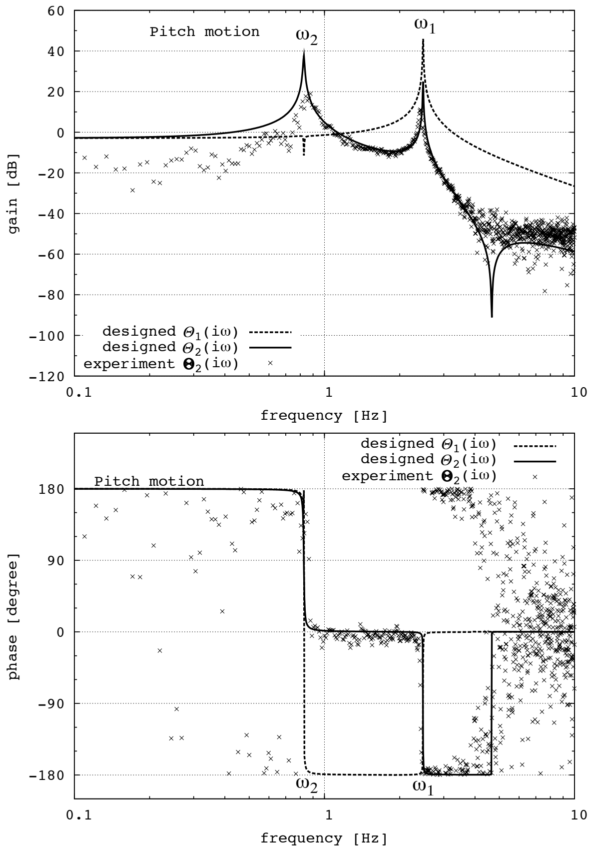

図 10　回転運動の周波数応答

これらを周波数 $f=\omega/(2\pi)$ Hz に対するゲイン曲線と位相曲線としてプロットしたものがボード線図（Bode diagram）である．

並進運動と回転運動に分けて解析と実験から得られた周波数応答を図 9 と図 10 のボード線図に示す．図 9，図 10 とも上段がゲイン線図，下段が位相線図である．横軸は $0.1 \leqq f \leqq 10$ Hz の周波数範囲である．縦軸のゲインの単位は dB で位相の単位は degree である．

図中の×印が実験値であり，30 セットのデータからそれぞれのパワースペクトルとクロススペクトルの平均値を用いることによりノイズの逓減が図られている．さらに，図中の実線が反射鏡（二段目）の理論計算による応答変位を示しており，点線は一段目の理論的な応答変位である．

ω_1 は重心 G_1 の運動の固有振動数（2.5 Hz），ω_2 は重心 G_2 の運動の固有振動数（0.83 Hz）を示している（理論値）．実験による固有振動数は理論値によく一致していた．また，理論からは推定しにくい減衰比 ζ_1，ζ_2 は実験結果の曲線概形にフィットさせて $Q_1 \approx 530$，$Q_2 \approx 100$ とした．ただし，$Q_1=(2\zeta_1)^{-1}$，$Q_2=(2\zeta_2)^{-1}$ と定義される Q 値（quality factor）である．

図 7 に示したように，反射鏡の中心は重心 G_1 に一致しているから二段目の支点 O_2（で代表される G_2）の並進運動は理論上 G_1 の並進運動に一致しなければならない．図 9 の並進運動のボード線図から実験上も一致することが確認された．そして，並進運動の振幅（ゲイン）は ω_2 の近傍を除いて一段の振り子のようである．

回転運動（図 10）において，共振周波数 $\omega \doteqdot \omega_2$ 付近では $|\Theta_2| \gg |\Theta_1|$ であり，二段目が大きく回転すると予想される．

しかし，ω_2 と ω_1 の中間より高い周波数（$\omega \gtrsim \omega_1$）では $|\Theta_2| < |\Theta_1|$ であり，徐々に振幅比の曲線が離れて最終的（$\omega \gtrsim \omega_{z2}$：高い方の反共振周波数）で二段目（点線）は一段目（実線）より 30 dB ほど低なる．これは

$$20\log_{10}|\Theta_2| - 20\log_{10}|\Theta_1| = 20\log_{10}|\alpha|$$

を意味している．したがって $\omega \gtrsim \omega_1$ 以上では

$$\frac{|\theta_2|}{|\theta_1|}=\alpha \tag{29}$$

となる．本実験振り子では設計により $\alpha \approx 0.03$ とした．これで，力学的な設計目標が達成されたと考えられる．そして，この設計目標を達成するための条件は式 (29) であることも示された．

さらにもし，設計方針 (ii) の条件である $\varepsilon\beta^2=\alpha\sigma^2\nu^2$ が完全に達成されれば，理論上，周波数 $\omega>\omega_1$ では $|\Theta_2|/|\Theta_1| \propto \omega^{-2}$ となる．

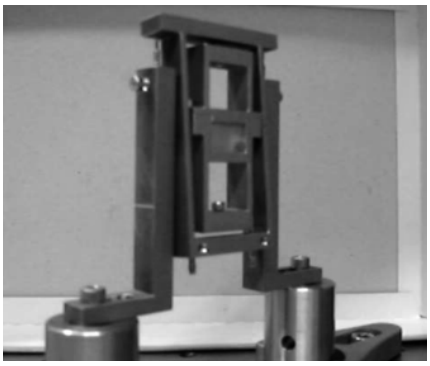

図 11　二段振り子の動作時の写真

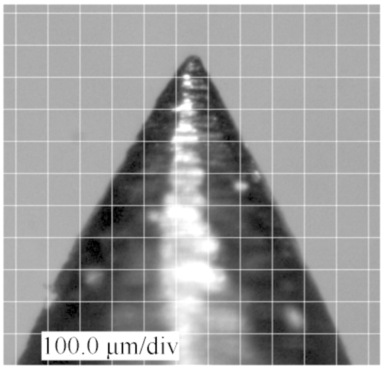

図 12　ピボットである針先端のようす

また，共振周波数 ω_2, ω_1 付近のピークは適切なダンピングを施すことにより抑制できる．

図 11 に周波数 $\omega_1/(2\pi) \doteqdot 2.5$ Hz で自由振動している際の写真を示す．常に二段目の振り子が垂直の姿勢を保ったまま水平振動しているようすが観察された．式 (29) の効果が現れている．

なお，本実験ではピボット軸受を利用した．ピボット軸受は，かつてはナイフエッジなどとともに，天文，測地観測の分野では多用されてきた．しかし，支持する荷重が大きくなると摩擦力が比例し，材料の剛性が不足すると支点がつぶれて，さらに摩擦力が飛躍的に増大したり，摩耗して支点の状態が不安定になるなどの問題があり廃れてきた．

ところが，本実験振り子のように重量が全体でたかだか 100g（重）であり，ピボット材料も超硬（針）とステンレス鋼（ピボット受）であって，充分に硬くて剛性も高い．また，ピボット（針）の先端は図 12 に示すように直径 $30 \sim 50$ μm の球面状であり，これとピボット受である平面との間には点接触による転がり摩擦が生じていると推定される．その場合は，摩擦係数は 0.1 以下であり，固体摩擦は充分に逓減されている．したがって，固体摩擦を無視した，本実験の単純な解析にも関わらず実験と解析がよく符合したものと考えられる．

5. まとめ

回転運動を抑制し，並進運動だけを出現させる二段振り子の設計法を検討した．一段目の重心と二段目の支点を一致させた物理振り子において，一段目と二段目の回転角が θ_1, θ_2 であるとき $|\theta_2/\theta_1| \ll 1$ を満たす力学的な条件を探した．設計と実験を通して，一段目と二段目の固有角振動数 ω_1, ω_2 において $\omega_2 \ll \omega_1$，かつ，一段目と二段目の回転半径 $r_2/r_1 = \alpha \ll 1$ が満足されれば，角振動数 $\omega \gtrsim \omega_1$ において $|\theta_2|/|\theta_1| = \alpha$ が実現することが分かった．

参考文献

1) 坪野公夫編，TAMA プロジェクト現状報告 (1999),
`http://tamago.mtk.nao.ac.jp/tama_j.html`.
2) K. Kuroda and the LCGT Collaboration, *Class. Quantum Grav.*, **23**, S215 (2006).
3) 日本機械学会編，機械工学便覧 基礎編 α 2 機械力学，pp143-145，丸善（2002）.
4) `http://www.aihara.co.jp/~taiji/pendula-equations/present.html`
5) 日本機械学会編，機械工学便覧 基礎編 α 2 機械力学，p44，丸善（2002）.